Universidade de Lisboa

A Comunicação Matemática Escrita no 10.º ano de escolaridade em contexto de Trabalho de Grupo

Ana Filipa Figueiredo Santos Matias

Mestrado em Ensino da Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
orientado pelos Professores

Doutora Leonor Santos

Doutor João Pedro Boto

2015

Universidade de Lisboa

A COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA ESCRITA NO 10.º ANO DE ESCOLARIDADE EM CONTEXTO DE TRABALHO DE GRUPO

Ana Filipa Figueiredo Santos Matias

Mestrado em Ensino da Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
orientado pelos Professores

Doutora Leonor Santos

Doutor João Pedro Boto

2015

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço aos meus orientadores. Agradeço à Professora Doutora Leonor Santos por toda a disponibilidade que mostrou, até ao último minuto. As suas contribuições foram essenciais para este trabalho e as suas críticas certeiras foram uma grande fonte de aprendizagem. Agradeço ao Professor Doutor João Pedro Boto, por todos os ensinamentos não só ao longo deste Mestrado, mas ao longo da minha vida académica, e também por toda a disponibilidade demonstradas para me acompanhar durante esta etapa. Agradeço também à Professora Doutora Ana Vieira, que mais que uma mentora, foi uma amiga. Foi um gosto enorme e uma grande aprendizagem acompanhá-la a fazer o que mais gosta, e é para mim, sem dúvida, um exemplo do que gostaria de me vir a tornar enquanto professora.

Agradeço, também, à minha família, toda a paciência e compreensão – eu sei que não é fácil lidar comigo em "modo trabalho".

Aos meus pais: Obrigada por me terem dado sempre todo o apoio que precisei, por confiarem em mim e por respeitarem todo o tempo que precisei, sem nunca me pressionarem a dar passos mais largos que os meus e, incentivando sempre, também, a que chegasse mais longe. Estou grata por tudo o que me proporcionam e por acreditarem sempre em mim.

À minha irmã: Obrigada por mostrares sempre admiração pelo meu trabalho, mesmo nas coisas mais simples. Obrigada por acreditares nas minhas capacidades e pela ajuda – serás sempre o meu primeiro dicionário - e incentivo que me deste.

À minha amiga Helena, com quem pude partilhar esta viagem com todos os seus altos e baixos: obrigada por teres acreditado sempre que era capaz.

À Joana, uma amiga por quem tenho a maior admiração profissional: obrigada por teres estado presente quando mais precisei e por teres despendido do tempo - que sei que não tens – para me dares os melhores conselhos.

À minha amiga Inês: obrigada por todos os momentos de descontração - foram tão precisos! – e por poder partilhar contigo todos aqueles episódios que tu achas que só me acontecem a mim. É bom ter-te aqui.

À minha amiga de sempre: Ninha, não há palavras que descrevam o quanto te estou grata por tudo o que fizeste por mim. Só tu sabes o quão difícil foram para mim os últimos anos e, sem a tua ajuda e disponibilidade constantes, não teria conseguido concluir este projeto. Obrigada por toda a ajuda, por todos os teus conselhos, por me teres obrigado a insistir nesta ideia que, em tempos, parecia perdida. Obrigada por teres sido mais do que um apoio, por nunca me teres deixado desistir, e por tentares tornar simples os obstáculos que julgava inultrapassáveis. Obrigada por teres aguentado os piores momentos e por teres estado presente nos melhores. Não vou esquecer as longas horas de trabalho em que me acompanhaste. Estar-te-ei sempre grata e espero poder retribuir.

RESUMO

Este trabalho investigativo surge da necessidade de aprofundar o conhecimento sobre a comunicação matemática escrita de alunos do 10.º ano de escolaridade, em contexto de trabalho de grupo. Incidiu sobre cinco aulas de 90 minutos, lecionadas a uma turma do 10.º ano de escolaridade, na Escola Secundária Professor José Augusto Lucas.

Atendendo à temática em estudo, as aulas lecionadas foram centradas no trabalho de grupo, tendo por base tarefas de natureza exploratória inseridas no tópico das funções quadráticas, com o objetivo de promover a discussão entre os elementos do grupo e em grande grupo.

A recolha de dados que possibilitou esta investigação foi realizada através da observação de aulas, da análise documental das produções escritas individuais resultantes do trabalho realizado em grupo e da análise do registo de gravações áudio da interação de dois grupos de alunos – sendo os mais representativos da heterogeneidade ao nível de aproveitamento – durante os momentos de realização das tarefas em grupo.

Este estudo sugere que embora já alguns alunos revelem preocupação em apresentar produções escritas com algum rigor, através do uso de terminologia matemática simbólica e de vocabulário formal, na sua maioria, recorrem ainda ao uso de vocabulário informal. Sugere, também, que a forma como produzem explicações escritas mais ou menos completas depende da forma como o trabalho em grupo é desenvolvido. Ficou evidente que os alunos não recorrem preferencialmente a um dos tipos de representação – algébrica ou gráfica.

Palavras-chave: Comunicação matemática; comunicação matemática escrita; trabalho de grupo; função quadrática; ensino secundário.

ABSTRACT

This research paper arises from the need to deepen the knowledge about written mathematics communication of 10^{th} grade students, on a group work context. This paper focused on the teaching of five 90 minutes' sessions, to a class of 10^{th} grade students in Escola Secundária Professor José Augusto Lucas.

Given the subject area at study, the classes were focused on group work, having been based on exploratory tasks within the topic of the quadratic function, with the purpose of promoting discussion amongst group members and among the group in general.

This investigation was possible due to the data collection that happened through class observation, through the documental analysis of the individual written productions resulting from the group work that was carried out, and from the analysis of the audio records that were made from the interaction between two groups of students, namely the most heterogeneously significant in terms of educational outcome, when they were performing group tasks.

This investigation suggests that despite 10^{th} grade students showing some concern in presenting thorough written productions through the usage of symbolic mathematical terminology and formal vocabulary, the majority of them still reach for informal vocabulary. It also impacts the way that these students produce written explanations, that can seem more or less detailed, depending on which way the group work is developed. It was very clear that the students do not reach for one of the types of representation with greater frequency – whether it be algebraic or graphic.

Keywords: Mathematics communication; written mathematics communication; group work; quadratic function; secondary education.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FÍGURAS

INTRODUÇÃO

No âmbito da disciplina de Iniciação à Prática Profissional IV, este estudo, de cariz investigativo, consiste no relatório da prática de ensino supervisionada que realizei. Como trabalho conclusivo do Mestrado em Ensino da Matemática, o contacto, ao longo do curso, com experientes profissionais da área da docência, assim como, os diferentes contextos escolares a que tive acesso, permitiram enriquecer este estudo, na medida em que, melhoraram a minha capacidade de refletir sobre as questões fundamentais a que um professor de Matemática, que inicia a sua experiência profissional, se deve dedicar.

Neste sentido, optei por aproveitar a minha prática de ensino supervisionada para explorar uma dessas questões. Interessei-me no estudo da comunicação matemática após reconhecer que é tida, pelo Ministério da Educação, como uma capacidade transversal a todos os temas da matemática, tanto no ensino básico, como no ensino secundário, pelo que deve estar presente no tratamento de qualquer unidade didática. Sendo que, é no ensino secundário, que os alunos deverão desenvolver a capacidade de usar justificações mais rigorosas a nível matemático, assim como a formar argumentos sólidos com base nas propriedades matemática que estudam (NCTM, 2007), a oportunidade de trabalhar com uma turma do 10.º ano de escolaridade despertou, também, o meu interesse nesta área.

Optei por estudar a comunicação matemática em contexto de trabalho de grupo por acreditar que esta metodologia de trabalho maximiza a exploração da comunicação matemática escrita. Trabalhando cooperativamente, os alunos são expostos às produções escritas dos colegas e/ou tomam decisões, em conjunto, sobre a forma como apresentam as suas resoluções. Tendo já tido alguma experiência com o trabalho de grupo com os alunos que acompanhei (tanto como professora, como observadora), considero que os alunos trabalham bem em grupo, apresentando bons resultados em tarefas exploratórias, o que me levou a querer desenvolver com eles, um projeto relacionado com a aprendizagem cooperativa.

Outra das minhas motivações pessoais para investigar o rigor na escrita matemática e na forma como os alunos tentam expressar as suas ideias é o facto de considerar que esta pode ser uma área delicada para um docente ainda sem experiência profissional. Uma vez que, ao longo do Mestrado, tive a oportunidade de me confrontar com algumas das minhas fragilidades enquanto docente, constatei que a gestão do trabalho de grupo em aula, nomeadamente, os momentos de discussão em grande grupo e síntese de resultados é ainda uma dimensão que preciso trabalhar com alguma insistência. Desta forma, considero que, a nível pessoal, seria um exercício vantajoso a ser feito em contexto de estágio, quando tenho a oportunidade de receber algum feedback em relação aos aspetos a melhorar.

Este estudo teve por base a lecionação de cinco aulas de 90 minutos, na Escola Secundária Professor José Augusto Lucas, a uma turma do 10.º ano de escolaridade, do Curso de Ciências e Tecnologias, na disciplina de Matemática A. A intervenção letiva teve início a 6 de Março de 2013, e terminou no dia 14 do mesmo mês, o que coincidiu com as aulas finais do 2.º período letivo. A subunidade que lecionei trata o estudo da função quadrática, pois encontrei, neste tema, uma boa oportunidade para criar tarefas de natureza exploratória, adequadas ao trabalho de grupo.

Segundo o National Council of Teachers of Mathemátics (2007), adiante referido como NCTM, "A comunicação é uma parte essencial da matemática e da educação matemática." (p. 66). Assim, torna-se num dos aspetos que mais tem sido focado no que respeita às orientações curriculares para o ensino da Matemática. A comunicação matemática é uma das capacidades transversais salientadas nos programas da disciplina, tanto para o 3.º ciclo, como para o ensino secundário, sendo considerada um meio que permite aos alunos a clarificação dos seus raciocínios, o estabelecimento de conexões e a reflexão sobre a sua aprendizagem. Além de ter esta relação evidente com as aprendizagens dos alunos, trabalhar a comunicação matemática faz também com que os alunos desenvolvam o seu espírito crítico, assim como a necessidade e gosto pelo uso de rigor na linguagem e na terminologia (ME, 2001).

Desta forma, tendo como principal objetivo compreender algumas das características da capacidade de comunicação matemática escrita no 10.º ano de escolaridade, em contexto de trabalho de grupo, procurarei dar resposta às seguintes questões:

(i) Qual o rigor da linguagem matemática que usam alunos do 10.º ano quando comunicam de forma escrita em trabalho de grupo? Usam terminologia matemática simbólica e vocabulário formal? Quais as principais dificuldades que apresentam?

(ii) De que forma produzem os alunos explicações escritas quando trabalham em grupo? Quais as principais dificuldades que apresentam?

(iii) Que tipo de representações – algébrica ou gráfica – são mais frequentemente trabalhadas pelos alunos? Quais as principais dificuldades associadas à abordagem algébrica e à abordagem gráfica?

Para a elaboração deste estudo, baseei-me na estrutura habitual de trabalhos de cariz investigativo, pelo que, começarei por enquadrar teoricamente a comunicação matemática e o trabalho de grupo na aula de Matemática. Farei uma breve caracterização da escola onde tomou lugar a intervenção letiva e da turma de 10.º ano que acompanhei durante todo o ano letivo de 2012/2013. De seguida irei descrever o desenvolvimento da minha intervenção letiva, explicitando as estratégias de ensino que adotei em função da subunidade didática trabalhada, e fazendo uma pequena apreciação das aulas que lecionei. Irei, então, proceder à análise de toda a informação recolhida ao longo da minha intervenção para, posteriormente, apresentar a minha reflexão final sobre o tema.

É meu intuito que este estudo represente uma boa reflexão e que se possa tornar útil para os momentos de reflexão de outros docentes que tenham interesse neste tema.

ENQUADRAMENTO DA PROBLEMÁTICA

Este estudo centra-se na capacidade de comunicação matemática escrita dos alunos, em contexto de trabalho de grupo. Desta forma, poderia ser desenvolvido com a prática de qualquer subunidade de ensino que permita a realização de tarefas que visem a comunicação. Ao longo deste capítulo, irei enquadrar o papel fundamental que a comunicação matemática tem nas aulas desta disciplina, assim como a importância da realização de uma aprendizagem cooperativa.

De fazer notar que, à data da minha intervenção letiva, altura em que foi iniciado este trabalho de investigação, vigorava Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), razão pela qual é referido, por diversas vezes, como fonte da minha investigação.

A Comunicação Matemática

A Importância da Comunicação Matemática

A Matemática é tida como fundamental à construção da língua através da qual nos comunicamos e inter-relacionamos, fornecendo instrumentos que permitem a compreensão mais profunda do que nos rodeia. Neste sentido, desenvolver a capacidade de comunicar matemática é essencial para os alunos.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) – em vigor no ano letivo de 2012/2013 – e o Programa de Matemática A do 10.º ano do Ensino Secundário (ME, 2001), a comunicação matemática é uma das capacidades transversais que deve estar presente ao longo do tratamento de qualquer unidade didática. Ao nível do Ensino Secundário, sobre o qual me foquei, uma das finalidades integrantes no programa é "desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade" (ME, 2001, p. 3).

O programa refere a importância da comunicação (oral e escrita) como meio para clarificar o pensamento, estabelecer conexões, refletir e desenvolver o espírito crítico, pois está fortemente relacionada com os processos de estruturação de pensamento. Algumas das sugestões metodológicas gerais no âmbito da comunicação revelam isso mesmo:

> O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, sempre que tal for aconselhável, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese. (…) deve ser incentivada com alguma regularidade a realização de trabalhos designados genericamente por “composições matemáticas”.
>
> (ME, 2001, p. 11)

Também o NCTM (2007) reconhece a transversalidade do tema da comunicação matemática, defendendo que desafiar os alunos a pensar sobre matemática e a comunicar as suas ideias faz com que se tornem mais convincentes e seguros dos seus argumentos, clarificando os seus raciocínios. Não só o facto de exprimirem as suas ideias, mas também o de ouvirem as ideias dos outros desenvolve, nos estudantes, o seu espírito crítico. Assim, as discussões em grande grupo são bastante produtivas para os alunos, pois ao confrontarem resultados divergentes, e ao terem que justificar as suas soluções, vão desenvolver a sua compreensão matemática sobre o tópico em exploração (Hatano & Inogaki, 1991, citados por NCTM, 2007).

À medida que vão transitando de ano de escolaridade, os alunos deparam-se com temas matemáticos cada vez mais abstratos, assim, cabe ao professor orientar os alunos para que estes se munem de ferramentas que lhes possibilitem continuar a comunicar matematicamente, pois este processo vai-se tornando mais complexo. Os alunos não estão habituados a conversar sobre matemática, e precisam de apoio para o fazer.

A relação comunicação-reflexão é evidente no que respeita às aprendizagens matemáticas. Por um lado, não é possível comunicar matemática sem antes refletir sobre o que se quer explicar, sem antes compreender as ideias que se querem discutir. Por outro lado, também não é possível realizar aprendizagens matemáticas sem haver comunicação. Até que ponto é que aprendemos realmente um conceito, uma ideia, sem a sabermos explicar? É, então, necessário que os alunos tenham oportunidades para apresentarem os seus resultados e exporem as suas ideias, para verificarem se estão ou não a ser explícitos e convincentes e até para testarem a sua própria compreensão.

Silver, Kilpatrick & Schlesinger (1990, citados por NCTM, 2007) consideram que uma das mais importantes vantagens da comunicação matemática na sala de aula é o facto de atribuir aos alunos alguma responsabilidade sobre a aprendizagem que decorre durante a aula. Quando expostos a novos conceitos ou a novas representações, se comunicarem com o professor, ou entre eles, podem tornar possível aceder a conceções incorretas a ser esclarecidas no processo de aprendizagem, precavendo possíveis situações de insucesso.

Trabalhar a comunicação matemática pode ser, no entanto, desafiante para o professor, na medida em que lhe exige uma planificação detalhada de forma a estimular a reflexão nos alunos. O professor deverá colocar questões que apelem à reflexão do aluno e que o conduza à concretização das aprendizagens (Santos & Semana, 2015). Este trabalho tem que ser adequado às características de cada turma e de cada faixa etária. (NCTM, 2007).

A Comunicação Escrita

Apesar de ser discutido há muitos anos que a comunicação matemática escrita pode promover um conhecimento mais profundo das ideias matemáticas, ainda não existem evidências deste facto. As produções escritas dos alunos estão condicionadas pela forma como a Matemática lhes é apresentada. Será, portanto, uma tarefa a longo prazo para os professores, trabalhar a comunicação matemática escrita de forma a que esta promova, aos alunos, uma reflexão sobre os conceitos matemáticos estudados, o que implicaria uma mudança não só das práticas dos professores, como também dos manuais escolares (Shield & Galbraith,1998).

A comunicação escrita toma um papel fundamental no que respeita à organização dos raciocínios matemáticos. Quando se comunica por escrito, há uma tendência para aprimorar as redações e representações, uma vez que ficará o registo para ser consultado por outros ou pelos próprios, que poderão consultá-los para relembrar conceitos e esclarecer ideias. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, devem primar pela clareza, organização e aspeto gráfico cuidado. Uma das recomendações do NCTM (2007) é que qualquer trabalho escrito seja também apresentado oralmente perante a turma e discutido com os colegas e o professor.

Da mesma forma que se deve encorajar a comunicação oral, a comunicação escrita deve ser trabalhada e aperfeiçoada ao longo da vida escolar. A comunicação escrita deve ser abordada desde logo, nos primeiros anos do ensino básico, uma vez que as crianças têm maior facilidade em desenvolver e aprender novas competências. (Ntenza, 2006). Atualmente, a escrita começa a tornar-se mais direcionada no 3.º ciclo do ensino básico. Se nos ciclos anteriores, os alunos apoiam-se quase exclusivamente nos desenhos e na escrita de frases para comunicarem, a partir do 7.º ano de escolaridade começa a ser-lhes exigido um maior rigor. Os alunos deverão ser confrontados com a necessidade de usar recursos além dos esboços e do uso da linguagem informal. É imprescindível que comecem a usar a terminologia matemática convencional. No final do ensino secundário, os alunos devem ser capazes de redigir argumentos matemáticos elaborados, com uso da terminologia e de vocabulário formal (NCTM, 2007).

De acordo com as normas publicadas pelo NCTM (2007, p. 140), relativas à comunicação:

> Os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para: (i) Organizar e consolidar o seu pensamento matemático através da comunicação; (ii) Comunicar o seu pensamento matemático de forma coerente e clara aos colegas, professores e outros; (iii) Analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usados por outros, (iv) Usar a linguagem da matemática para expressar ideias matemáticas com precisão.

Especificamente entre o 9.º e o 12.º anos de escolaridade, a comunicação difere dos anos anteriores devido ao aprofundamento matemático e devido à exigência de rigor na exposição oral e escrita. Torna-se necessário que os alunos justifiquem as propriedades matemáticas que utilizaram nos seus raciocínios. Os alunos já devem ter a capacidade de produzir explicações, formular questões e escrever argumentos corretos e coerentes. Espera-se que os alunos tenham já assimilado normas de diálogo e de argumentação com o intuito de clarificar e completar justificações que identifiquem como defetivas (NCTM, 2007).

Para ultrapassar os obstáculos associados com a comunicação matemática escrita na sala de aula, esta deverá ser integrada no currículo de matemática para professores e nos manuais escolares para melhorar as suas abordagens e as suas práticas (Ntenza, 2006). A aprendizagem da escrita matemática assemelha-se ao processo de aprender qualquer outro tipo de escrita, pelo que deverá ser orientado. Da mesma forma a orientação é fundamental no que respeita à construção de argumentos matemáticos; à pertinência de significados particulares da linguagem matemática e de tipos de representações; e ao cumprimento das regras de demonstração e justificação (NCTM, 2007).

Também destacada nas Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), está a ideia de proporcionar aos alunos experiências que lhes permitam apropriar-se do conceito de definição matemática, fazendo conexões entre a linguagem matemática formal e a linguagem utilizada no dia-a-dia. O recurso tecnológico pode, também, criar situações de desenvolvimento da linguagem. Exemplo disso mesmo é o paralelismo entre os símbolos utilizados numa folha de cálculo e os símbolos algébricos utilizados frequentemente na aula de matemática. Os alunos beneficiarão, assim, do uso de tecnologia.

Com o intuito de aprimorar a linguagem matemática formal, os alunos são confrontados com diferentes tipos de representações matemáticas. Segundo Friedland & Tabach (2001), para que a aprendizagem seja eficiente, de forma a atribuir significados aos conceitos apresentados, é necessária a conjugação de quatro tipos de representações distintas: *numérica*, *verbal*, *gráfica* e *algébrica*. No âmbito deste trabalho, vou focar-me nas vantagens e desvantagens da representação *gráfica* e *algébrica*.

A representação *gráfica*, por um lado, destaca-se pela sua componente visual. A utilização de gráficos torna-se bastante intuitiva para os alunos, que conseguem ter uma imagem clara dos valores que toma uma função real de variável real. Por outro lado, a representação gráfica depende de fatores externos, nomeadamente a escala utilizada, e, na maior parte das vezes, mostra apenas parte do domínio da função em análise, de acordo com o contexto do problema, o que pode levar a interpretações erróneas.

A representação *algébrica*, utilizada principalmente nas generalizações matemáticas, é bastante precisa e eficiente nos modelos matemáticos. No entanto, este tipo de representação acarreta algumas dificuldades para os alunos, na medida em que torna mais abstrata a interpretação das funções/expressões representadas apenas por símbolos algébricos.

A representação *algébrica* é insuficiente no estudo das funções/expressões, quando explorada isoladamente, podendo causar várias dificuldades aos alunos na sua compreensão/interpretação. (Kiera, 1992, citado por Friedland & Tabach, 2001). O mesmo pode acontecer com a representação *gráfica*. Assim, a utilização conjugada destas representações fortalece as aprendizagens dos alunos, permitindo-lhes uma interpretação mais clara do comportamento de uma função. A mais valia de uma das representações permitirá colmatar as lacunas da outra. Ao estarem familiarizados com ambos os tipos de representação, os alunos conseguirão identificar qual será o mais vantajoso, de acordo com as tarefas/questões colocadas, desenvolvendo, desta forma, o seu espírito crítico.

O Trabalho de Grupo na Aula de Matemática

O trabalho de grupo e em pares favorece a comunicação matemática pois os estudantes acabam por partilhar com os colegas e com o professor os seus métodos de resolução ou as justificações dos seus raciocínios. Neste sentido, parece-me pertinente que se discuta a comunicação matemática no contexto de trabalho de grupo. Seguidamente irei enquadrar teoricamente o trabalho de grupo no Programa da Matemática.

O Papel do Trabalho de Grupo no Programa de Matemática

De acordo com o Programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade (ME, 2001), adiante designado de PMA, os métodos de trabalho praticados no ensino da Matemática conferem-lhe um papel ativo na educação dos jovens, no que respeita à sua autonomia, solidariedade e sentido de responsabilidade e envolvência na sociedade em que vivem.

É, então, sugerido que os professores proporcionem aos seus alunos diversidade no tipo de tarefas que estes experimentam nas aulas de Matemática, tentando que haja um equilíbrio entre o número de vezes que trabalham individualmente e em grupo, assim como entre o número de trabalhos de projeto e tarefas investigativas que realizam (ME, 2001). Na última década, o ensino da matemática tem vindo a sofrer algumas mudanças, nomeadamente, no que diz respeito à prática do trabalho cooperativo, à qual tem sido atribuída uma importância que, em tempos de uma prática de ensino mais conservadora, não era significativa.

O trabalho de grupo aparece como uma das estratégias de ensino que deve ser explorada na sala de aula, sendo o aumento do tempo das aulas de Matemática, destinado ao trabalho em pequenos grupos, uma das orientações curriculares mais reforçadas (Ponte, Boavida, Graça & Abrantes, 1997).

O Trabalho de Grupo como Aprendizagem Cooperativa

O conceito de trabalho de grupo considerado está inevitavelmente associado à "aprendizagem cooperativa". É dessa forma que Davidson (1990, citado por Abrantes, 1994), enfatiza a vertente cooperativa deste tipo de trabalho, afastando-se da noção da realização de tarefas, por pequenos grupos de alunos aleatoriamente distribuídos. Enquanto professores de Matemática, faz sentido falar do tipo de trabalho que promove o questionamento, a discussão de ideias e a capacidade de expressá-las e de ouvir as dos outros, bem como o desenvolvimento do espírito crítico.

A prática do trabalho de grupo deverá ser intencional (Bishop & Goffre, 1986, citado por Abrantes, 1994), apelar à compreensão, à reflexão, à resolução de problemas e à participação ativa de todos os alunos na atividade escolar. Quando bem gerida e orientada pelo professor, promove muitos dos valores e atitudes expressos no PMA (ME, 2001):

Exprimir e fundamentar as suas opiniões;

Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios;

Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada;

Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades;

Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças;

Intervir na dinamização de atividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.

Em 1992, Good, Mulryan & McCaslin, citados por Abrantes (1994), concluem, através da análise de estudos de caso, que o trabalho em grupo pode ser fator de sucesso, não só nos resultados dos alunos, como na formação das suas atitudes perante a disciplina e a interação social.

A Distribuição dos Alunos em Grupos de Trabalho

Para a aprendizagem ser significativa, a distribuição dos alunos entre os grupos não deverá ser aleatória. Esta deverá potencializar as tarefas propostas ao seu mais elevado grau de exploração. O professor terá a seu cargo a organização dos grupos. Um dos aspetos que provoca a discórdia entre os autores é a composição dos mesmos. Se, por um lado, existem autores que defendem a formação de grupos de três a cinco elementos, por outro, alguns defendem que a aprendizagem cooperativa deve dar-se com uma turma repartida em dois ou três grupos, o que aumenta significativamente a sua composição. Johnson & Johnson (1990, citado por Abrantes 1994), acreditam que os grupos devem ser tanto menores quanto maior for a inexperiência neste tipo de prática, sendo o trabalho a pares uma forma primária de promover a aprendizagem cooperativa.

Também a heterogeneidade é uma categoria chave nesta questão, principalmente no que respeita ao nível de aproveitamento escolar na disciplina. A grande maioria dos autores defende que grupos heterogéneos são mais favoráveis aos alunos (Davidson, 1990; Crabill, 1990, citados por Abrantes, 1994), na medida em que os alunos com melhor aproveitamento são desafiados a partilharem os seus conhecimentos com os colegas e, simultaneamente, os alunos com aproveitamento mais fraco são incentivados a envolverem-se na atividade, expondo as suas dúvidas e questões. O aproveitamento das capacidades dos diferentes alunos deve-se ao facto de haver uma responsabilização pessoal de cada aluno pelo trabalho que é desenvolvido em grupo. Esta só se desenvolve se for estimulada pelo professor, nomeadamente, através da recolha aleatória dos registos do trabalho de alguns alunos como representativos do trabalho realizado em grupo (Nunes, 1997).

Como dizem Freitas & Freitas (2002), a organização de uma equipa deve orientar-se no sentido de rentabilizar a atuação de todos os seus elementos, para que a equipa sinta que a sua atuação é, fundamentalmente, útil. Existem, também, investigadores como, Good, Mulryan & Mccaslin (1992), citados por Abrantes (1994), que acreditam que os alunos com melhor aproveitamento, quando trabalham com alunos com maiores dificuldades, tornam-se “dominantes” impedindo que se faça o exercício de discussão e reflexão pretendido.

O Trabalho de Grupo e a Compreensão Matemática

Com o intuito de avaliar de que forma o trabalho cooperativo promove, nos alunos, o aprofundamento da compreensão matemática, Francisco (2012), realizou um estudo cujo principal objetivo foi dar resposta às seguintes questões:

(1) de que forma trabalhar em grupo leva os alunos a conseguir compreender e resolver um problema?

(2) de que formas se pode trabalhar em grupo e que influência têm numa aprendizagem mais consistente?

(3) de que forma a compreensão matemática resulta da sua participação num trabalho de grupo?

(4) que influência tem a participação de cada aluno na qualidade de trabalho produzida em grupo?

O autor conclui que o trabalho cooperativo pode promover nos alunos uma melhor compreensão matemática, na medida em que se criam oportunidades para os alunos reavaliarem a validade das suas ideias e argumentos, assim como para construir novas ideias com base nas sugestões de cada um dos colegas.

No seu estudo, Francisco (2012) conclui, também que o facto de os alunos encararem a matemática como uma ciência de construção de raciocínio e não apenas de aplicação de normas, também tem bastante influência no processo de aprendizagem. O autor destaca a importância da cultura criada na sala de aula na promoção da compreensão matemática – os alunos devem estar familiarizados com a necessidade de justificar as respostas dadas em todas as tarefas propostas.

O autor acredita que os alunos trabalharem juntos numa mesma ideia ou optarem por trabalhar individualmente em ideias que vão surgindo são duas posturas distintas mas decisivas na promoção da aprendizagem matemática, quando em contexto de trabalho de grupo. Ambas desenvolvem a capacidade de criar novas ideias e processos para abordar problemas matemáticos.

O papel ativo dos professores quando propõem tarefas em grupo aos seus alunos também é destacado por Francisco (2012). Estes devem encontrar formas de ajudar os alunos a expressarem as suas ideias como grupo, sem, no entanto, deixar que nenhum aluno perca a iniciativa de participar e até de liderar o trabalho em questão. Os professores devem também atender à cultura da sala de aula, familiarizando os alunos com situações que se conjuguem com as expectativas que temos para a sua aprendizagem; por exemplo, os alunos devem conhecer a necessidade de usar justificações e argumentos válidos para fundamentar as respostas dos problemas. Devem, também, estar atentos à forma como constroem e propõem uma tarefa matemática a um grupo de alunos, por exemplo, propor problemas que possam gerar discussão entre os alunos, promovendo, assim, o aprofundamento do conhecimento matemático.

Ao colaborarem no trabalho uns dos outros, os alunos avaliam a forma como fundamentam os seus argumentos e, também, criam oportunidades de construir ideias mais sólidas e melhor fundamentadas a partir de ideias primárias das dos colegas. (Francisco, 2012).

O Trabalho de Grupo e a Comunicação Matemática

O PMA (ME, 2001) faz algumas sugestões metodológicas no sentido de ser dada maior importância à construção de conceitos a partir da experiência de cada aluno. A prática do trabalho de grupo será, também, bastante favorável ao desenvolvimento da comunicação matemática, na medida em que incentiva o aluno a (i) justificar processos de resolução, (ii) a comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza, (iii) a exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens e (iv) a apresentar os textos de forma clara e organizada.

Desta forma, o desenvolvimento da comunicação matemática estará inerente à prática de uma aprendizagem cooperativa. Os alunos são levados a expressar as suas ideias, raciocínios e conceitos matemáticos aos colegas e, muitas vezes, a relatar por escrito as conclusões a que chegam, em conjunto, bem como os processos utilizados. No contexto de trabalho de grupo, a conjugação de tarefas de escrita explanatória e a implementação de estratégias de avaliação formativa – como o feedback oral e escrito – contribuem para uma comunicação escrita mais cuidada por parte dos alunos, principalmente no que respeita às justificações. (Santos & Semana, 2015). Caberá ao professor tirar o máximo partido dos momentos de trabalho de grupo, de forma a estimular o uso correto de vocabulário específico da Matemática e incentivar à reflexão e à discussão entre alunos, sobre ideias ou procedimentos matemáticos.

Abrantes (1994) reconhece a relação de dependência entre o trabalho de grupo, as capacidades que se pretendem desenvolver e o tipo de tarefas propostas aos alunos:

> O trabalho em pequenos grupos parece adequado quando se dá ênfase á comunicação e à discussão entre os alunos e, em particular, quando se propõem problemas abertos e realistas, que os alunos exploram durante um período de tempo mais ou menos prolongado. (p. 170)

A prática do trabalho de grupo, cada vez mais recomendada como método de trabalho para as aulas de Matemática, não deve ser encarada com ligeireza. Mais do que trabalhar em grupo, os alunos devem ter consciência do trabalho cooperativo que devem realizar, e cabe aos professores potencializar as aprendizagens que os alunos podem enriquecer com a interação com os seus pares.

As potencialidades da aprendizagem cooperativa levantam uma série de questões associadas à realização de trabalhos de grupo, nomeadamente em relação à gestão que o professor faz desta atividade. Atualmente bastante numerosas, as turmas agrupam alunos com aproveitamentos muito distintos, assim como diferentes posturas na sala de aula, pelo que cada professor, deverá saber distinguir quais os melhores procedimentos a adotar para implementar este tipo de atividade na sala de aula.

CONTEXTO ESCOLAR

Caracterização da Escola

Este estudo tomou lugar na Escola Secundária Professor José Augusto Lucas (adiante referida como ESPJAL), situada numa zona residencial em Linda-a-Velha, no conselho de Oeiras, na área de Grande Lisboa.

A ESPJAL é a sede do agrupamento de escolas de Linda-a-Velha e Queijas, do qual também fazem parte: três Jardins de Infância, cinco Escolas Básicas do 1.º Ciclo e uma Escola Básica dos 2.º e 3.º Ciclos. Sendo a ESPJAL a única Escola Básica do 3.º Ciclo e Secundário do seu agrupamento, esta ministra os cursos de básico e secundário – ciências e tecnologias, ciências socioeconómicas, línguas e humanidades e artes visuais. A escola oferece, também, o curso Profissional de Técnico de Contabilidade e o curso de Educação e Formação de Assistente Administrativo.

A ESPJAL alberga cerca de 1100 alunos de diversas classes socioeconómicas, havendo predominância da classe média, residindo, em grande parte em bairros de qualidade média e elevada em Linda-a-Velha e Carnaxide. Apesar da maioria dos alunos ter nacionalidade portuguesa, nos últimos anos tem-se verificado um ligeiro acréscimo de alunos de outras nacionalidades.

Apostando numa cultura de inclusão, a Escola tenta combater constrangimentos socioeconómicos, psicoafectivos ou cognitivos, oferecendo apoio aos alunos mais carenciados e recorrendo às Salas de Estudo e Oficinas de Aprendizagem. Há que salientar o Projeto "Oficinas da Matemática" que oferece, semanalmente, a todos os alunos dos diferentes anos letivos, apoio ao estudo da disciplina, fora do horário escolar obrigatório. A carga horária destas oficinas é reforçada para os anos letivos que são submetidos a exames nacionais.

Caracterização da Turma

A intervenção letiva foi realizada com a turma C do 10.º ano de escolaridade, do Curso de Ciências e tecnologias, na disciplina de Matemática A. A turma C é constituída por 30 alunos, dos quais 18 são raparigas e 12 são rapazes. Todos os alunos têm idades compreendidas entre os 15 e 16 anos.

A maioria, 19 dos alunos da turma, já frequentavam a ESPJAL durante o 3.º Ciclo. Com a recente formação do agrupamento das escolas, muitos alunos que frequentaram a Escola Básica 2.º e 3.º Ciclos Professor Noronha Feio, em Queijas, foram transferidos para a ESPJAL, aquando da transição para o ensino secundário. É este o caso de 10 alunos desta turma. Destaca-se ainda o caso de uma aluna que provém da Escola Básica 2.º e 3.º Ciclos Vieira da Silva, em Carnaxide. Nesta turma, há grupos de alunos que já frequentam juntos a escola desde o Ensino Pré-primário.

Este ano letivo, não se verificaram casos de alunos repetentes. Existe um aluno que estava integrado num Programa Educativo Individual, o que fez com que tenham sido respeitadas algumas normas específicas de sala de aula, nomeadamente, quanto ao lugar que ocupa na sala e quanto à interação professor-aluno. No entanto, o aluno em questão foi sempre avaliado de acordo com os parâmetros de avaliação estipulados para todos os alunos da turma.

Apesar de haver dois grupos de alunos vindos de escolas diferentes, todos os alunos parecem ter-se integrado bem na turma. Foi considerada, pela maioria dos professores, uma turma simpática, interessada e com grande potencial a nível das suas aprendizagens. Alguns dos professores já acompanhavam parte da turma desde o 3.º ciclo. A turma revelou predisposição para aprender e um bom comportamento em sala de aula. Não se verificaram casos preocupantes de indisciplina, sendo que situações que anteviram uma tendência para piorar o comportamento foram, de imediato, reportadas aos encarregados de educação, que demonstraram sempre uma presença ativa na vida escolar dos alunos.

Ao longo do ano, os encarregados de educação mostraram-se empenhados em acompanhar os alunos no seu percurso escolar. Muitos mantiveram o contacto constante com a diretora de turma, partilhando, frequentemente, as suas preocupações relativamente aos educandos com os professores. Apesar de ter conhecimento da existência de alguns quadros familiares com alguma complexidade, não houve repercussões no desempenho escolar ao nível do aproveitamento e comportamento destes alunos.

Os dados estatísticos mostram que a maioria dos encarregados de educação dos alunos desta turma terminou o ensino secundário/ curso médio ou frequentou o ensino superior, como revelam os gráficos da Figura 1.

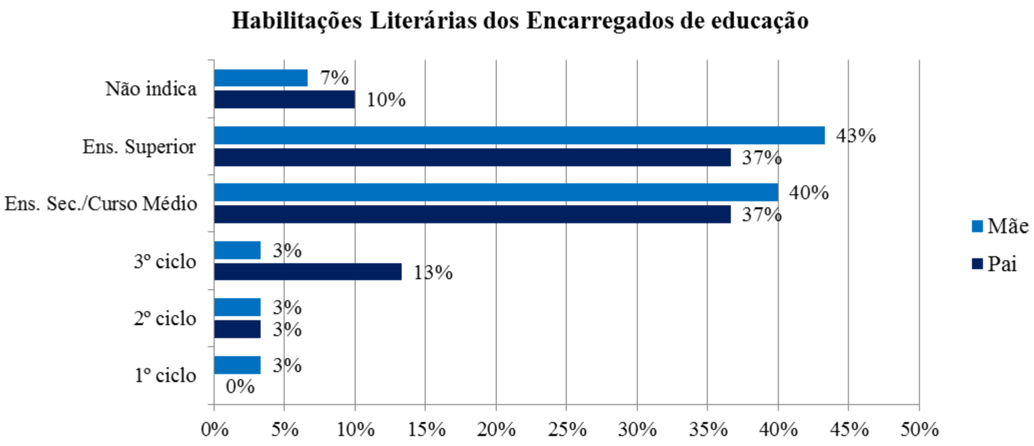


Figura 1 - Habilitações literárias dos encarregados de educação dos alunos da turma C do 10.º ano

Relativamente à naturalidade dos encarregados de educação, os dados estatísticos revelam que a maioria dos encarregados de educação dos alunos da turma C são de naturalidade portuguesa, conforme se pode observar nos gráficos da Figura 2.

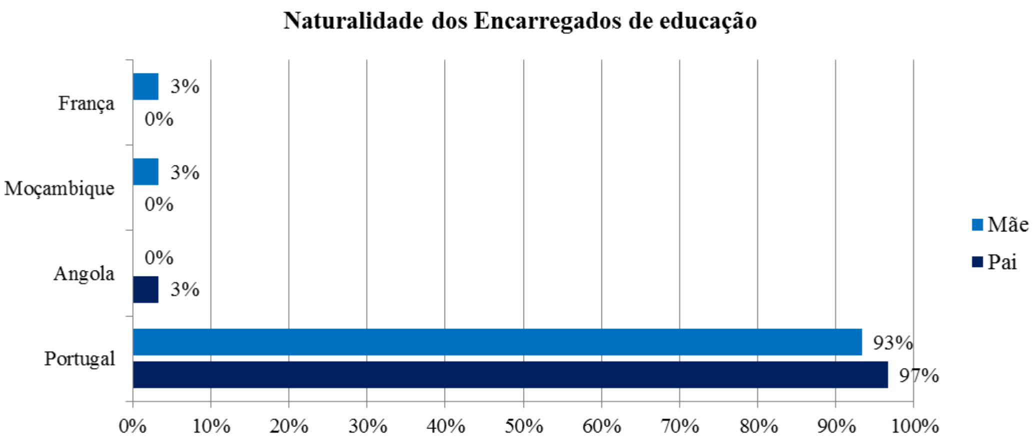


Figura 2 - Naturalidade dos encarregados de educação dos alunos da turma C do 10.º ano

Os alunos foram, em geral, bastante cooperativos, dando bons contributos para o desenvolvimento da aula, o que permitiu diversificar o tipo de estratégias de ensino. Estes alunos demonstraram bons resultados no que respeita aos momentos de trabalho autónomo, mas também revelaram resultados bastante positivos quando em contexto de trabalho de grupo. Em geral, os alunos mostraram apreço por este método de trabalho, pois torna o ambiente de trabalho mais descontraído, o que faz com que se sintam mais à vontade para expor as suas dificuldades.

No que respeita à disciplina de Matemática A, a professora responsável pela turma, Professora Ana Vieira, esteve, pela primeira vez, com estes alunos, uma vez que, nos últimos anos, não lecionou na ESPJAL. A Professora foi, também, a diretora da turma em questão.

As classificações no final do 1.º período letivo na disciplina de Matemática foram bastante positivas, sendo que cerca de 46% da turma, ou seja, 14 alunos, tiveram classificações entre os 14 e 17 valores (numa escala de 0 a 20). Apenas 20% da turma obteve resultados negativos no 1.º Período. A turma obteve uma média de 13,2 valores.

Neste período destacaram-se dois casos preocupantes de alunos que obtiveram classificações de 4 e 6 valores e que revelaram pouco empenho em melhorar a sua situação. Pela positiva, destacou-se ainda um aluno que obteve 20 valores. Além de ter mantido as classificações em todos os momentos de avaliação sumativa, este aluno revelou-se bastante trabalhador, empenhado e muito correto nas suas atitudes; sempre disposto a colaborar com os colegas, contribuindo frequentemente para a aula com intervenções oportunas.

Enquanto que no 1.º período letivo, cerca de 53% dos alunos obtiveram classificação igual ou superior a 14 valores, no 2.º período este valor baixou para os 40%. Houve um aumento de 3 pontos percentuais nas classificações negativas. A turma obteve uma média de 13,1 valores. Neste período, ocorreram dois casos de anulação de matrícula na disciplina de Matemática A. Num dos casos, a aluna decidiu alterar a sua área de formação para línguas e humanidades, tendo optado por assistir apenas às disciplinas que integram a área em questão no restante ano letivo. O outro aluno que anulou a matrícula decidiu ingressar num curso profissional, tendo esta decisão sido ponderada em conjunto pelos encarregados de educação, professores e psicólogos da ESPJAL.

No 3.º período letivo, os resultados foram bastante positivos, uma vez que 77% dos alunos obtiveram classificação igual ou superior a 10 valores. A turma obteve uma média de 13,0 valores. No entanto, houve três casos de alunos que não transitaram de ano escolar. Dois destes foram os alunos que procederam à anulação da matrícula; o terceiro trata-se de uma aluna cujo caso particular foi discutido em conselho disciplinar. Foi decidido pelos professores, de forma unânime, que seria mais benéfico para a aluna repetir o 10.º ano escolar. A aluna terminou o ano com a classificação de 7 valores na disciplina de Matemática A. Destaca-se, também, neste

3.º período a classificação de 20 valores por parte de um aluno, o mesmo que obteve esta classificação no 1.º período.

A Figura 3 representa a distribuição dos resultados obtidos pela turma do 10.º C, na disciplina de Matemática A, nos três períodos letivos.

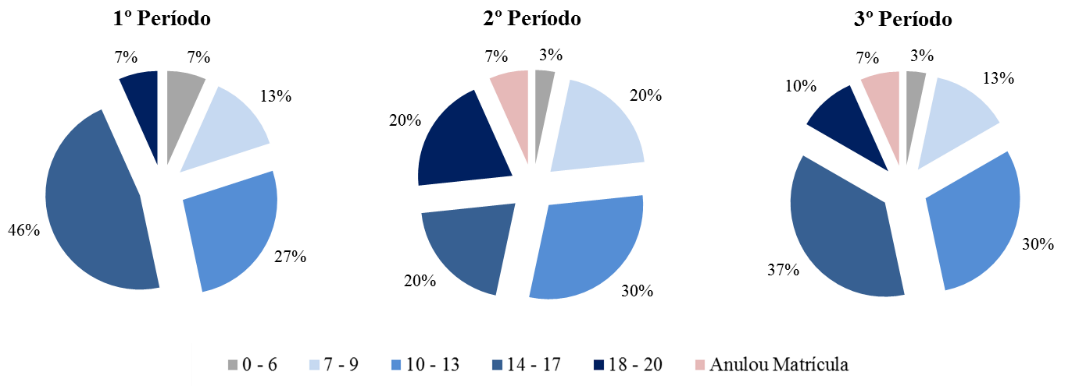


Figura 3 - Classificações da turma do 10.º C, na disciplina de Matemática A, nos três períodos letivos

Ao contrário do que se observou na disciplina de Matemática, em que a classificação média do 1.º para o 3.º período letivo apresentou uma ligeira redução – duas décimas –, em todas as outras disciplinas, esta variação foi positiva, mostrando, assim, que as classificações refletiram o bom desempenho da turma ao longo do ano letivo. A Figura 4 mostra as classificações médias em cada uma das disciplinas, no 1.º e 3.º períodos letivos.

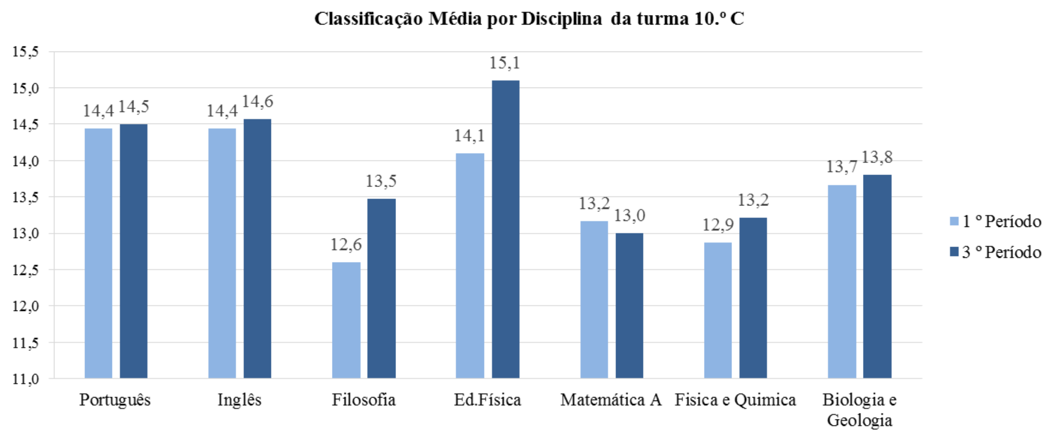


Figura 4 - Classificações médias das disciplinas, no 1.º e 3.º períodos letivos

UNIDADE DIDÁTICA

No âmbito deste trabalho investigativo, abordei com a turma do 10.º ano de escolaridade uma subunidade do tópico das Funções. As cinco aulas de 90 minutos que dizem respeito à minha intervenção foram dedicadas, em particular, ao estudo da função quadrática. Os subtópicos abordados foram (i) famílias de funções quadráticas e (ii) transformações simples da função quadrática.

Ao longo do 3.º ciclo, os alunos são confrontados com o conceito de função como relação entre variáveis, tópico que é tratado no âmbito do tema da Álgebra. Assim sendo, os alunos já deveriam estar familiarizados com as noções de domínio, contradomínio e gráfico de uma função. No entanto, uma vez que nem todos os alunos tiveram aulas de Matemática de acordo com o Programa (ME, 2007), todos estes conceitos foram relembrados e reforçados, assim como a sua aplicação prática no contexto de problemas. Esta revisão dos conceitos anteriormente trabalhados teve lugar nas aulas que antecederam a minha intervenção letiva, aquando do início do estudo das funções.

De acordo com o Programa da Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), os alunos deveriam também já ter tido contacto com as funções quadráticas, nomeadamente com a sua representação gráfica e com a influência da variação do parâmetro a em funções do tipo $y = ax^2$. No 10.º ano de escolaridade, o estudo das funções, e particularmente da função quadrática, é aprofundado. Além da análise do gráfico da função, o estudo é, também, analítico e numérico, dando-se importância ao "trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas" (ME, 2001, pp. 26-27).

Um dos objetivos específicos que se pretende alcançar com o estudo das funções, no 10.º ano de escolaridade é a compreensão de um mesmo tipo de função como um modelo para diferentes tipos de situações problemáticas. Pretende-se também, que o uso da calculadora gráfica/computador leve a que os alunos entendam as diferenças entre as representações gráficas de uma mesma função, de acordo com a escala utilizada. Os alunos devem, também, ser sensibilizados para a construção manual do gráfico de uma função. Espera-se, dos alunos, que elaborem conjeturas, desenvolvendo, ao longo do tempo, espírito crítico face às suas próprias conclusões.

No programa (ME, 2001), são feitas algumas recomendações metodológicas no que respeita à unidade das funções. Irei, de seguida, referir as indicações metodológicas particularmente associadas ao estudo da função quadrática.

Quanto ao estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, para as funções quadráticas, sugere-se o estudo do domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo das ordenadas e à origem, e limites nos ramos infinitos, seja a partir de um gráfico particular ou do uso da calculadora gráfica. Pretende-se ainda que os alunos determinem os pontos notáveis e extremos tanto de forma exata como de forma aproximada, partindo do gráfico traçado na calculadora gráfica ou no computador.

Neste estudo das propriedades das funções deve recorrer-se (i) à análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes – considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez; e (ii) às transformações simples de funções – dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$ com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

Sugere-se que os alunos realizem pequenas investigações acerca do estudo das famílias de funções e que recorram à calculadora gráfica/computador para estudar as transformações simples de funções, embora também o devam fazer usando papel e lápis. Recomenda-se que a função seja dada a partir de um gráfico ou a partir de uma expressão analítica. O programa alerta também para que o aluno seja “confrontado com situações em que os erros de aproximação conduzam a resultados absurdos” (ME, 2001).

Tendo em conta as indicações acima referidas, as tarefas escolhidas para trabalhar nas aulas correspondentes à minha intervenção letiva pretenderam ser diversificadas e desafiantes para os alunos. Assim, pretendi promover a discussão, de forma a tirar o maior partido dos vários momentos de trabalho de grupo planeados. Em muitas destas tarefas, foram criadas as condições para que os alunos recorressem ao uso da calculadora gráfica, de forma obrigatória e/ou opcional.

Assuntos Fundamentais presentes na Unidade Didática

No 10.º ano de escolaridade, o tema das Funções divide-se em três subtemas:

- Funções e gráficos – generalidades;
- Funções Polinomiais;
- Função Módulo.

Ao longo deste tema, pretende-se que os alunos desenvolvam a capacidade de (i) analisar gráficos; (ii) identificar funções; (iii) analisar o comportamento de funções; (iv) utilizar a calculadora gráfica no estudo de funções; e (v) esboçar gráficos a partir de um gráfico dado através de transformações simples.

Uma vez que o tema das Funções surge no 1.º ano do 3.º Ciclo, isto é, no 7.º ano de escolaridade, os alunos já conhecem o conceito de função. Sendo, no entanto, um tema sempre presente no programa de Matemática até ao final do ensino secundário, parece-me fundamental manter presente a definição deste conceito:

> *Definição* – Uma função f, definida num conjunto D e com valores num conjunto E, pode ser vista como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de D (chamado *objeto*) um único elemento de E, que se designa por y ou por $f(x)$ (chamado *imagem*). O conjunto D é designado por *domínio* de f e o conjunto C, de todas as imagens dos elementos do domínio é designado por *contradomínio*. Deste modo, o contradomínio C é um subconjunto de E, o conjunto onde a função toma valores. As variáveis x e $f(x)$ são, respetivamente, as variáveis independente e dependente. (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 17)

As cinco aulas que lecionei incidiram sobre o estudo da função quadrática. Tal como referi anteriormente, no ensino básico, os alunos já abordaram a função quadrática na forma $y = ax^2$ (com a inteiro e diferente de zero), reconhecendo a parábola como gráfico desta função. Os alunos também já devem reconhecer que o parâmetro a tem influência no gráfico: para valores positivos de a, a parábola tem a concavidade virada para cima e, para a negativo, a concavidade está voltada para baixo. Se a toma valores mais próximos de zero, a parábola tem um aspeto achatado e para valores de a mais elevados, tem um aspeto mais esguio.

Os alunos já estão, também, familiarizados, com os conceitos de domínio e contradomínio e, de forma intuitiva, com os conceitos de monotonia e zeros de uma função.

No 10.º ano, o estudo da função quadrática é aprofundado através do estudo de (i) algumas propriedades do gráfico da função quadrática enquadrando o seu significado no contexto dos problemas; (ii) da influência dos parâmetros a, h e k em funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$; (iii) da relação dos parâmetros a, b e c, com o eixo de simetria e o vértice das parábolas de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$; (iv) da relação dos parâmetros a, b e c, com o eixo de simetria e o vértice das parábolas de funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$.

Neste sentido, estruturei as aulas que lecionei, para que os alunos compreendessem estes novos conceitos de forma intuitiva e exploratória. Irei apresentar de forma sucinta, os conceitos apresentados aos alunos durante a minha intervenção letiva.

i. Estudo da influência dos parâmetros a, h e k em funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$:

- A influência do parâmetro a em funções do tipo $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2$:

  Os alunos deverão rever o que aprenderam no 3.º ciclo, relativamente ao parâmetro a.

- A influência do parâmetro k em funções do tipo $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{k}$:

  O gráfico da função $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ sofre uma translação segundo o vetor $(0, k)$.

- A influência do parâmetro h em funções do tipo $\mathrm{y} = (\mathrm{x} - \mathrm{h})^2$:

  O gráfico da função $\mathrm{y} = \mathrm{x}^2$ sofre uma translação segundo o vetor $(h, 0)$.

ii. Estudo da relação entre a expressão analítica de $y = a(x-h)^2 + k$ com:

- O vetor (h, k):

  Os gráficos das funções do tipo $f(x) = (x-h)^2 + k$ sofrem uma translação segundo o vetor (h, k);

- O vértice da parábola:

  As parábolas têm vértice (h, k);

- O eixo de simetria da parábola:

  As parábolas têm eixo de simetria definido pela equação $x = h$.

iii. A relação dos parâmetros a, b e c em funções do tipo $y = ax^2 + bx$ com:

- O eixo de simetria:

  O eixo de simetria das parábolas do tipo $y = ax^2 + bx$ é uma reta vertical que passa nos pontos cuja abcissa é a semissoma dos zeros da função;

- O vértice das parábolas:

O vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola, tendo como abcissa a semissoma dos zeros da função;

iv. A relação dos parâmetros a, b e c em funções do tipo $y = ax^2 + bx + c$ com:

- O eixo de simetria:

O eixo de simetria das parábolas do tipo $y = ax^2 + bx + c$ é o mesmo que o eixo de simetria das parábolas do tipo $y = ax^2 + bx$. (O gráfico sofre apenas uma translação vertical, o que não afeta a simetria do mesmo).

- O vértice da parábola:

O vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola, mantendo, assim, a abcissa, em relação às funções do tipo $y = ax^2 + bx$. (Apenas se altera a sua ordenada, pois tem um aumento de c unidades).

A par com todas as transformações, os alunos devem recorrentemente fazer o estudo dos gráficos da função quanto ao seu domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos.

No desenrolar desta unidade, e atendendo à forma como cada tópico é abordado, promove-se nos alunos a compreensão da relação entre a representação algébrica e a representação gráfica de cada uma das funções.

É neste ano escolar que é introduzida a utilização da calculadora gráfica como objeto de recurso à resolução de problemas. Desta forma, é explorada uma componente visual na sua aprendizagem, que permite aprofundar o conhecimento do comportamento do gráfico de uma função, de acordo com todas as transformações estudadas.

Estratégias Seguidas

Atualmente, no ensino, pretende-se que os professores optem por praticar nas suas aulas um método de ensino exploratório (Ponte, 2005; Canavarro, 2011). Assim, nas aulas que lecionei, procurei sempre recorrer a este método de ensino.

Tendo acompanhado a turma desde o início do ano, e avaliando a forma como se comportam na sala de aula, a relação que têm com as professoras e a relação que têm entre si, apercebi-me de que este método de ensino seria bem recebido pelos alunos.

Dadas as características da turma – trata-se de uma turma simpática, recetiva, empenhada, motivada e que demonstra uma postura respeitosa para com a professora responsável pela turma, bem como, pelas professoras estagiárias que os acompanharam, não fazendo distinção entre estas – uma professora ainda com pouca experiência de ensino, depara-se com um ambiente favorável à prática deste método. Uma vez que identifiquei esta prática como uma das minhas fragilidades, encontrei aqui uma boa oportunidade para explorar este método de ensino.

De acordo com Canavarro (2011), o ensino exploratório defende uma aprendizagem mais autónoma por parte dos alunos, assente no trabalho consistente que deve ser praticado com base em tarefas adequadas. Este tipo de ensino, embora reconheça maior autonomia nos alunos, requer um grande envolvimento do professor que terá, de acordo com cada fase da aula, um papel mais ou menos interveniente, mas sempre ativo, exigindo-lhe, desta forma, uma preparação exaustiva.

Sendo o método de ensino exploratório centrado no aluno, este requer um comportamento e participação disciplinada na sala de aula por parte dos alunos, o que se verificou nesta turma. Ao longo das aulas, estes alunos deram sempre contributos enriquecedores e construtivos, mostrando um espirito de entreajuda – mesmo quando o trabalho proposto assim não o exigia – e lançando questões que, muitas vezes, vinham a ser oportunas para a discussão em grande grupo.

Individualmente, os alunos foram ganhando algum sentido de responsabilidade pela sua própria aprendizagem, sendo esta uma das principais finalidades da prática do ensino exploratório. A adoção desta estratégia teve como principal motivação alcançar o sucesso nas aulas lecionadas, sendo que este ocorre apenas aquando da concretização das aprendizagens por parte dos alunos.

Apesar de reconhecer as dificuldades associadas ao método de ensino exploratório, principalmente, para um docente sem qualquer experiência prévia de ensino, acredito que, no ensino secundário, o estudo das funções, pode apelar fortemente à intuição dos alunos, pelo que a exploração lhes permite concretizar aprendizagens mais consistentes.

Este método de ensino alimenta-se da discussão, do levantamento de questões e do confronto com novas ideias pelo que, um ambiente de trabalho de grupo maximiza todas as suas potencialidades.

Mediante os objetivos do meu estudo investigativo, tornou-se fundamental que os alunos fossem confrontados com tarefas que lhes exigiam alguma reflexão e discussão, para que o trabalho de grupo fizesse sentido e fosse potencializado.

Optei também por construir algumas tarefas que permitiam o recurso às tecnologias: quer por parte da professora – com o uso do programa *sketchpad* no computador – quer por parte do aluno – através da exploração da calculadora gráfica. As tecnologias, quando utilizadas adequadamente, são mais um fator que contribui para a concretização das aprendizagens dos alunos. Uma vez que o tema tratado foi o das funções, a componente visual pode ser fundamental para uma compreensão bem sucedida.

Tendo como linha condutora todos estes fatores, as minhas aulas foram planeadas segundo os seguintes parâmetros:

(i) Foram aulas centradas no trabalho de grupo, com base em tarefas de natureza exploratória que promoveram a discussão entre os elementos do grupo e em grande grupo;

(ii) Houve um momento de avaliação sumativa, que tomou lugar no final da lecionação da subunidade em causa, em que os alunos realizaram uma minificha de avaliação sobre o trabalho realizado;

(iii) Algumas das tarefas propostas exigiram a exploração da calculadora gráfica como recurso à sua resolução;

(iv) Grande parte dos momentos de discussão em grande grupo centrou-se no recurso ao computador, particularmente, ao programa *sketchpad*.

(v) Propuseram-se, também, alguns exercícios de consolidação, que permitiram tornar mais consistentes as aprendizagens realizadas.

Sequência de Tarefas

Na minha intervenção letiva, as aulas foram centradas, na sua maioria, na realização de tarefas de natureza exploratória e investigativa. Nestas tarefas os alunos:

> não dispõem de métodos de resolução imediata e têm de formular as suas próprias estratégias (…) as tarefas não constituem simples exercícios em que os alunos têm de aplicar conhecimentos previamente aprendidos mas requerem uma resposta original, ainda que baseada em conhecimentos e experiências prévias.
>
> (Ponte, Nunes & Quaresma, 2008, p. 8)

Para tirar o melhor partido da realização das tarefas propostas, optei por respeitar os quatro momentos de aula habitualmente considerados no ensino exploratório, sugeridos por Ponte, Nunes & Quaresma (2008), sendo estes: (i) apresentação da tarefa, (ii) realização da tarefa (individuais, a pares ou em pequenos grupos), (iii) discussão em grande grupo e (iv) síntese.

Segundo os autores, o momento de apresentação deve ser breve e tem como objetivo o esclarecimento de todas as questões relacionadas com a compreensão do/a enunciado/tarefa e com as orientações acerca do modo de trabalho estabelecido. O momento de realização da tarefa é centrado no trabalho do aluno, pelo que o professor deve circular pela sala de aula, averiguando quais as dificuldades que surgem, se devem ser discutidas de momento e como devem ser esclarecidas (individual ou coletivamente). O papel do professor deve ser de questionamento e não de explicador. Quanto à discussão em grande grupo, esta deve envolver todos os alunos, já que é um momento propício ao desenvolvimento da comunicação matemática. Deve existir algum cuidado ao escolher quais os pontos da tarefa a destacar por parte do professor, por forma a evitar a repetição de informação ou a discussão de informação irrelevante. Finalmente, o momento da síntese e de sistematização é de extrema importância e deverá ser feito com a colaboração dos alunos, para que estes possam compreender a ligação entre as ideias trabalhadas e os conceitos previamente conhecidos. É durante este momento que os alunos devem concretizar as suas aprendizagens. A exploração deste tipo de tarefas é bem-sucedida quando ocorre a formalização de novos conceitos e/ou representações como resultado da sua realização e discussão.

As tarefas propostas nas aulas relativas à minha intervenção foram baseadas no manual Matemática 10, Edições Contraponto. Em conjunto com a Professora Ana

Vieira, foram discutidas algumas alterações às tarefas, necessárias à promoção da comunicação matemática dos alunos e à necessidade de justificação.

Irei, de seguida, apresentar as tarefas propostas aos alunos, de acordo com os objetivos traçados para cada aula e para a unidade didática em questão. A minha escolha recaiu sobre tarefas de natureza exploratória, para que os alunos alcançassem a concretização das aprendizagens relativas às propriedades das famílias da função quadrática de forma intuitiva e natural, e nunca de forma mnemónica; isto é, decorando regras e procedimentos, sem compreender o que provoca as transformações dos gráficos das funções estudadas.

Deslizando sobre o triângulo **(Ficha de trabalho n.º 1)**

A tarefa de introdução ao estudo da função quadrática pretendia relembrar aos alunos o tipo de gráfico que representa esta função. Por esta altura, a parábola já lhes era familiar, mas senti necessidade de reforçar esta questão. Ao longo das aulas, foram apresentados aos alunos diversos problemas em contexto geométrico para abordar diferentes tópicos da matéria planeada. Assim, optei por explorar algumas propriedades do gráfico da função quadrática, como o domínio, o contradomínio, o sinal, os zeros, a monotonia e os extremos do gráfico através de um problema deste tipo. Foi meu objetivo, também, ao recorrer à geometria, que a vertente visual associada a este tipo de problemas os ajudasse a compreender o significado destas propriedades no contexto do problema.

Esta tarefa, centrada na relação das áreas do triângulo e do trapézio com o deslocamento de um ponto (Anexo VI), está dividida em quatro questões:

Numa primeira fase – questões 1 e 2 – explora-se o problema recorrendo à área do trapézio. Espera-se que os alunos recordem algumas propriedades geométricas como a semelhança de triângulos para procederem à sua resolução; terão, também de recorrer às equações de 2.º grau. No entanto, o objetivo principal do problema é que os alunos se vão apercebendo que a situação é representada graficamente por uma parábola e, consequentemente, por uma função quadrática, sendo confrontados com ambas as representações – gráfica e algébrica. Se, na questão 1, o gráfico da função deve ser estudado tendo em conta o contexto do problema, na questão 2, faz-se a transposição para o estudo da função sem limitações de domínio/contradomínio, apelando ao uso da calculadora gráfica como recurso para esta exploração

Na segunda fase – questões 3 e 4 – a tarefa é abordada recorrendo à área do triângulo. O estudo realizado é semelhante ao anterior, pelo que se espera que os alunos já tenham mais facilidade na sua resolução.

Esta tarefa foi construída com o intuito de ser trabalhada em pequenos grupos e, posteriormente, discutida em grande grupo. Para a discussão, foi preparada uma apresentação utilizando o programa *sketchpad* no computador, que lhes permitiu ver a relação, em tempo real, das variáveis da função.

***Áreas e perímetros de retângulos* (Ficha de trabalho n.º 2)**

Esta tarefa foi construída como complemento à tarefa anterior - *Deslizando sobre o triângulo* – já que segue a mesma linha de exploração. Trata, também, do gráfico da função quadrática através de um problema geométrico distinto (Anexo VII).

A função representa, neste caso, a relação entre a área e a medida dos lados de um retângulo, fixado o seu perímetro. Volta a ser central que o domínio da função deve ser ajustado ao contexto de um determinado problema. Embora possa parecer que a sequência destas duas tarefas é repetitiva, é fundamental que os alunos sejam confrontados com a questão do domínio de uma função dentro e fora de um determinado contexto em problemáticas distintas, dadas as dificuldades que surgem associadas a este tipo de questões.

A resolução em aula desta tarefa complementar esteve condicionada à conclusão da tarefa anterior. Foi construída considerando a hipótese dos alunos poderem resolver a tarefa em casa, num momento de estudo autónomo. Ainda assim, para alguns alunos da turma esta não foi uma tarefa de dificuldade reduzida, pelo que contei com as Oficinas da Matemática que se seguiram a esta aula para esclarecer questões de alguns alunos.

***Família de Funções Quadráticas I* (Ficha de trabalho n.º 3)**

Após os alunos recordarem as propriedades do gráfico da função quadrática, relacionando sempre o seu significado com o contexto do problema proposto, foi-lhes dada esta tarefa para a introdução do tópico das transformações de funções quadráticas (Anexo VIII). A tarefa é, também, de índole exploratória e foi planeada para uma resolução em pequenos grupos com posterior discussão em grande grupo.

Pretendi, com esta tarefa, que os alunos estudassem a influência dos parâmetros a, h e k em funções do tipo $y = a(x - h)^2 + k$.

Esta tarefa é constituída por três questões, tendo por base a mais simples das funções quadráticas, $y = x^2$. Numa primeira fase, os alunos exploram a influência do parâmetro a em funções do tipo $y = ax^2$ no gráfico das funções. Numa segunda fase, os alunos exploram a influência do parâmetro k em funções do tipo $y = x^2 + k$ no gráfico das funções. E, finalmente, os alunos exploram a influência do parâmetro h em funções do tipo $y = (x - h)^2$ no gráfico das funções.

Em cada uma das três questões, pretendi que os alunos estabelecessem conjeturas quanto às características das funções, consoante a variação dos parâmetros a, h e k.

Foi, também, meu objetivo com esta tarefa, que os alunos explorassem o recurso à calculadora gráfica. Neste sentido, e uma vez que, hoje em dia, a oferta de calculadoras gráficas já é bastante diversificada e nem todos os alunos trabalham com o mesmo tipo de calculadora, senti necessidade de preparar um documento informativo (Anexo XVII) com os procedimentos para realizar diferentes ações recorrendo à calculadora. Para tal, tive em conta as marcas e modelos de calculadoras existentes por entre os alunos desta turma.

Família de Funções Quadráticas II **(Ficha de trabalho n.º 4)**

Após a abordagem inicial às transformações de funções quadráticas consoante a variação individual de cada um dos três parâmetros, feita através da ficha de trabalho *Família de Funções Quadráticas I* (Anexo VIII), pareceu-me essencial que os alunos testassem as transformações resultantes da variação simultânea dos três parâmetros. Assim, com esta ficha de trabalho (Anexo IX), pretendi que os alunos analisassem a função, tendo em consideração as conclusões que tiraram da tarefa anterior.

Foi meu intuito que os alunos começassem, numa primeira fase, por avaliar a variação de dois destes parâmetros em simultâneo para que, no final da tarefa, elaborassem um pequeno relatório explicando a influência de cada um dos parâmetros nas características das funções da família $y = a(x - h)^2 + k$. Este tipo de prática exige reflexão por parte do aluno, que é enriquecida pela discussão inerente ao ambiente de trabalho de grupo. Pretendi que os alunos consolidassem as suas aprendizagens desta forma e utilizassem já algum rigor nas suas justificações.

Também esta tarefa tem caráter exploratório e foi planeada para ser resolvida em pequenos grupos. Posteriormente, foi feita a sistematização de aprendizagens com a colaboração dos alunos, recorrendo, uma vez mais, ao programa *sketchpad*. Aqui, pretendi enfatizar a relação dos parâmetros h e k na família de funções $y = a(x-h)^2 + k$ com um movimento de translação segundo o vetor (h, k) e a relação destes mesmos parâmetros com o vértice (h, k) da parábola transformada.

Tal como nas tarefas anteriores, é necessário o recurso à calculadora gráfica para o estudo das propriedades das funções. Pretendi que os alunos fossem desenvolvendo alguma autonomia no que respeita ao uso da calculadora, e a utilizassem por iniciativa própria, para testar outros exemplos distintos dos que foram pedidos.

***Família de Funções Quadráticas III* (Ficha de trabalho n.º 5)**

No seguimento das tarefas anteriores, o tópico das transformações de funções foi aprofundado com esta ficha de trabalho (Anexo X). Pretendi, agora, trabalhar a representação algébrica destas funções e relacionar os parâmetros a, b e c, com o eixo de simetria e o vértice das parábolas de funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$.

A tarefa está dividida em dois grupos principais. No primeiro grupo, pretendi que os alunos conseguissem, através do gráfico da função, chegar à expressão algébrica na sua forma canónica $ax^2 + bx + c$. Para o efeito, é dada como sugestão a escrita da expressão algébrica do tipo $y = a(x-h)^2 + k$. Assim, a expressão $ax^2 + bx + c$ resulta da anterior desenvolvendo-a algebricamente.

No segundo grupo, a tarefa tem quatro questões que permitem que os alunos consigam encontrar o vértice de uma parábola cuja expressão analítica é $y = ax^2 + bx + c$. Estruturei estas quatro questões de forma a que os alunos seguissem a seguinte linha de raciocínio:

(1) Compreender que o eixo de simetria das parábolas do tipo $y = ax^2 + bx$ é uma reta vertical que passa nos pontos cuja abcissa é a semissoma dos zeros da função;

(2) Compreender que o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola (tendo, portanto, como abcissa a abcissa média entre os zeros da função);

(3) Compreender que o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ é o mesmo que o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx.}$ Ou seja, as parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ traduzem-se numa translação horizontal das parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$, o que não afeta a simetria das mesmas.

(4) Compreender que o vértice de uma parábola do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ pertence ao eixo de simetria da mesma, mantendo, consequentemente, a abcissa, em relação às funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$. Apenas se altera a sua ordenada resultante da translação do gráfico da função transformada.

(5) Obter, a partir do cálculo dos zeros de uma função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$, a equação do eixo de simetria e a abcissa do vértice das parábolas de qualquer função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$.

Esta tarefa foi planeada para uma resolução a pares, numa primeira fase, tendo sido concluída em grande grupo.

Deslizando sobre a diagonal **(Ficha de trabalho n.º 6)**

Esta foi a tarefa final da minha intervenção letiva (Anexos XI e XII). Desta forma, trata-se de uma tarefa de consolidação de conhecimentos. Para a resolução desta tarefa recorri ao programa *sketchpad* no computador para ilustrar a problemática da tarefa, mesmo antes de serem entregues as fichas aos alunos. Senti necessidade de complementar as orientações dadas no enunciado com uma componente visual, para uma melhor compreensão do contexto problemático.

Numa primeira fase da tarefa, pretendi que os alunos fizessem um esboço do gráfico que representasse a situação exposta, e que o acompanhassem com um pequeno texto explicativo das opções tomadas quanto às propriedades do gráfico da função (monotonia, zeros, domínio e contradomínio). Pretendi, uma vez mais, explorar o significado destas propriedades do gráfico da função no contexto do problema.

Na segunda fase da tarefa, após resolverem as sete questões propostas, pretendi que os alunos confrontassem as elações que tiraram na fase inicial da tarefa com as conclusões tiradas após o estudo rigoroso da função.

Esta tarefa foi planeada para a resolução em pequenos grupos, com posterior discussão na qual foi destacada a importância de justificar os raciocínios que apoiam os cálculos efetuados e as opções tomadas.

Como já teria vindo a ser habitual ao longo do ano letivo, foram, também, propostos vários trabalhos retirados do manual escolar para os alunos resolverem em casa, para que se fossem apercebendo, gradualmente, das suas dificuldades, e para que pudessem consolidar os conhecimentos adquiridos. Serviram ambas as Oficinas da Matemática relativas às duas semanas de intervenção letiva (e outras tantas que se seguiram), para o esclarecimento de dúvidas particulares que não contribuíram para o desenvolvimento das aprendizagens da turma, em geral. No entanto, tentei que fossem incorporadas em aula as dúvidas passíveis de serem discutidas em grande grupo, sempre que oportuno.

De acordo com o Programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade (2001), o papel do professor passa por ser "dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adotando uma estratégia que implique o estudante na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa" (p. 12). Desta forma, tive sempre presente a preocupação de conciliar o objetivo principal da aula - garantir a concretização de aprendizagens consistentes nos alunos - com a necessidade de recolher produções escritas que me permitiram uma análise significativa para o estudo em causa.

Assim, as tarefas propostas tiveram, também, a finalidade de promover a comunicação matemática, de forma a permitir a avaliação da qualidade das justificações matemáticas, uso da terminologia matemática convencional e vocabulário formal.

Avaliação das Aprendizagens

De acordo com o Programa de Matemática A do 10.º ano do Ensino Secundário (ME, 2001), a avaliação não deve ser reduzida a um sistema de classificação sumativa das aprendizagens dos alunos. O professor deve, por isso, ter presente a noção de avaliação formativa, isto é, a avaliação que promova a aprendizagem. Avaliar as aprendizagens dos alunos significa, assim, analisar dados que possibilitem ao professor inferir sobre os conhecimentos dos alunos acerca dos conceitos matemáticos trabalhados (Santos, 2009).

Além de dar informações sobre os conhecimentos dos alunos ao professor, a avaliação deverá dar aos alunos informações para que estes possam refletir sobre a sua própria aprendizagem, atribuindo-lhes responsabilidade sobre esta. Neste sentido, as atividades de aprendizagem deverão ser também consideradas como tarefas de avaliação.

No que respeita à comunicação matemática, o PMA (ME, 2001) sugere a implementação de composições matemáticas como um dos elementos de avaliação, em cada período. Este tipo de tarefas poderá ser realizado individualmente ou em grupo, já que ao ter que escrever ou explicar, de forma clara, as suas estratégias e ao ouvir a dos seus colegas, o aluno desenvolve não só a comunicação matemática como o seu raciocínio matemático e espírito crítico relativamente a novas ideias que possam surgir. Cabe ao professor observar e interagir com os alunos, de forma a potenciar a sua aprendizagem e, simultaneamente, recolher dados que o permitam inferir sobre os seus conhecimentos. Assim, os momentos de avaliação por escrito deverão ser reconhecidos como momentos de síntese de aprendizagens tanto pelo professor como pelos alunos.

Neste sentido, durante a minha intervenção letiva, servi-me de (1) observação das aulas; (2) registos escritos dos alunos; (3) minificha de avaliação como elementos de avaliação.

(1) Uma vez que em grande parte das minhas aulas existiram momentos de trabalho em grupo, foi-me possível observar a discussão de conceitos e estratégias de resolução por parte dos alunos, durante os momentos de realização das tarefas, assim como, avaliar a forma como comunicam as suas ideias e o tipo de contributos que dão para o desenvolvimento das aprendizagens, nos momentos de discussão em grande grupo;

(2) A recolha das produções escritas dos alunos forneceu-me dados para a realização do meu estudo, mas principalmente, permitiu-me obter informações sobre a evolução das aprendizagens dos alunos;

(3) No final da minha intervenção letiva, foi realizada uma minificha de avaliação (Anexo XIII), método a que os alunos já estariam habituados desde o início do ano, e que encaravam como uma síntese de aprendizagens, no final de cada unidade didática e como uma forma de fazer um ponto de situação sobre os tópicos estudados.

Durante todo o ano letivo, continuei a colaborar na elaboração dos testes e das minifichas que foram sendo realizadas, o que também me permitiu construir algumas questões que abordassem, especificamente, os tópicos matemáticos que trabalhei com os alunos, durante a minha intervenção. Neste sentido, a análise da Minificha n.º 8 (Anexo XIII), da Minificha n.º 9 (Anexo XIV), da Minificha n.º 10 (Anexo XVI) e do 5.º teste de avaliação (Anexo XV), permitiram-me, também, refletir sobre a concretização das aprendizagens dos alunos.

Descrição Sumária das Aulas Realizadas

Neste capítulo irei fazer uma breve descrição das cinco aulas que compuseram a minha intervenção letiva. Para cada uma delas, irei fazer uma reflexão sobre as principais aprendizagens que realizei em cada aula.

Aula n.º 1 – 6 de Março de 2013 (90 minutos)

A minha primeira aula desta intervenção letiva teve início à hora prevista. Já habituados à presença de outros professores na sala de aula (uma vez que, por esta altura, já várias das suas aulas tinham sido conduzidas por ambas as estagiárias e, consequentemente, observadas pelos professores orientadores da prática de ensino supervisionada), os alunos mostraram, uma vez mais, o respeito que tinham pelas professoras de estágio. Neste dia, fizeram um esforço para serem mais pontuais, e sentaram-se de forma ordeira.

Tal como era hábito, fui uns minutos antes para a sala de aula, de forma a preparar os materiais necessários ao cumprimento do plano de aula, nomeadamente o computador. Procedi, de imediato, ao registo do sumário no quadro.

De seguida, informei os alunos que as tarefas iriam ser realizadas em pequenos grupos e alertei os alunos sobre algumas alterações que optei por fazer nos grupos que habitualmente se formavam para trabalhar em aula. Estas alterações resultaram da experiência neste tipo de trabalhos em aulas anteriores. Pretendi, desta forma, potenciar a qualidade de trabalho de cada grupo.

A organização dos grupos gerou alguma agitação nos alunos, que tiveram de se deslocar e mover mesas para poderem reunir com os colegas, pelo que tive que aguardar alguns instantes antes de proceder à entrega das fichas e à apresentação da tarefa da Ficha n.º 1 (AnexoVI).

Na apresentação da tarefa não surgiram dúvidas – pelo menos os alunos não se manifestaram – pelo que os informei do tempo que tinha previsto inicialmente atribuir a esta fase da aula e dei início à realização da tarefa. Por esta altura, tive que me dirigir aos dois grupos selecionados para o registo da gravação áudio nos momentos da realização de tarefas em grupo. Se, por um lado, alguns alunos se mostraram um pouco intimidados com a existência de um gravador – embora eu lhes tenha explicado que o registo iria apenas ser considerado para o meu trabalho enquanto investigadora, e que não iria ter qualquer influência no meu trabalho enquanto professora, é natural que os alunos se sintam um pouco constrangidos com a situação – por outro lado, os restantes alunos mostraram-se um pouco agitados, cheios de curiosidade sobre o assunto. Embora tenham sido previamente avisados dos procedimentos que iria tomar, esta agitação atrasou o início do seu trabalho.

A partir deste momento fui circulando pela sala de aula, apreciando a evolução do trabalho dos alunos e esclarecendo algumas dúvidas que foram surgindo. Com alguns grupos de alunos, apercebendo-me de que não estavam a conseguir desenvolver as questões iniciais, coloquei algumas questões pertinentes que os levassem a refletir sobre a problemática em questão, e que os fizesse alcançar os objetivos a que a tarefa se propunha. Essas questões já teriam sido previamente pensadas, fazendo parte do meu plano de aula (Anexo I).

Sendo esta tarefa uma exploração do gráfico da função quadrática, uma das questões que motivou alguma discórdia entre os elementos de vários grupos foi a dualidade entre o domínio da função no contexto do problema e o domínio da função real:

Ana: Qual é o domínio?
Bárbara: Então, é de 0 a 5 ([0,5]), não é?
Ana: Mas devia ser de 0 “aberto”!
Francisca: Não é nada 0 aberto! O P no início é 0.
Bárbara: Mas se o $\overline{PM}$ for 0, não há figura.
Francisca: Eu sei, mas o $\overline{PM}$ pode ser 0. Não percebes? O P parte do M e chega ao E, por isso se o P pode ser 5, também pode ser 0.
Ana: Então, o contradomínio é que tem que ser 0 aberto. Ou tem, também, de ser fechado? Eu acho que devia ser aberto!
Bárbara: Também eu!
Ana: Professora?! Estes zeros não deviam ser abertos?
Professora: Qual é o significado de x?
Bárbara: O x é o deslocamento do P.

Professora: E o P desloca-se onde?
Bárbara: De M para E.
Professora: Pode estar em M?
Bárbara: Pode.
Professora: Pode estar em E?
Bárbara: Pode. Mas quando o P está em M, não há figura, é uma linha.
Professora: Então, quando o P está em M, qual é a área da figura?
Bárbara: É 0. Ah!

[registo de aula, 6 de Março de 2013]

Enquanto acompanhava os grupos de alunos nas suas resoluções, apercebi-me de que o ritmo de trabalho estava muito aquém do que eu tinha previsto. Tomei, então, a decisão de prolongar a resolução da tarefa, em detrimento da segunda tarefa planeada para a aula (Anexo VII) que viria a ser recomendada, mais tarde como trabalho para casa.

A tarefa acabou por ocupar o tempo total da aula, pelo que dei este momento terminado apenas a 5 minutos do final da aula, tempo que me permitiu fazer a marcação das tarefas propostas para casa, assim como proceder à entrega dos testes de avaliação, também programada para esta aula. Esta entrega foi deixada, propositadamente para o final da aula, por se tratar sempre de um motivo de agitação da turma. Desta forma, não se perdeu tempo de aula, que cada vez mais se revela insuficiente.

Reflexão sobre a aula n.º 1

Como já tinha previsto, esta aula teve alguns pontos positivos e outros tantos negativos. Apesar de não ser a primeira vez que teria ficado com a responsabilidade da aula na íntegra, nem a primeira vez que o faria com a presença dos Professores Orientadores, senti-me bastante nervosa, o que pode sempre atrapalhar momentos chave da aula em que temos que tomar decisões rápidas que determinam o rumo que a aula tomará. Enumero, de seguida, alguns momentos da aula sobre os quais me questionei.

Assim que apresentei a tarefa aos alunos, arrependi-me de não o ter feito antes de dar as indicações para formarem os grupos de trabalho. Além da agitação inicial inerente a este momento, o que leva a que muitos alunos se encontrem desatentos, metade dos alunos já estariam de costas para a professora. Apesar de terem todos consigo uma cópia do enunciado da ficha de trabalho, nesta situação, os alunos tendem a não ouvir nem seguir o que está a ser dito. Este pode ser um fator de impedimento para que compreendam na totalidade a tarefa que terão de desempenhar.

Outra das minhas preocupações foi o facto de não estar a cumprir com o plano de aula. Aprendi com vários professores já experientes, que a planificação de uma aula deve funcionar como um guião auxiliar para um melhor aproveitamento da aula e das tarefas que propomos aos nossos alunos, sempre com o objetivo primário de fazê-los alcançar a concretização de aprendizagens. No entanto, aperceber-me, em aula, que não vou conseguir cumprir com metade do que tinha planeado não é só assustador, é também grande motivador de stress, para uma professora com tão pouca experiência. Isto fez-me questionar a minha capacidade de gestão de tempo. Fez-me também questionar se não seria inexperiência da minha parte ter planeado esta tarefa para um período de tempo reduzido. Hoje, porém, não me arrependo de ter desistido de explorar em aula a segunda tarefa planeada. Sei que tomei essa decisão, acreditando que os alunos iriam tirar maior benefício da aula se não apressasse a resolução da tarefa da Ficha de trabalho n.º 1 (Anexo VI). E para uma aula ser bem-sucedida, o professor tem de ter consciência que as decisões que toma devem ser sempre para benefício das aprendizagens dos seus alunos.

Aula n.º 2 – 7 de Março de 2013 (90 minutos)

Para esta aula, tive de fazer várias alterações de última hora à sua planificação, uma vez que na aula anterior não foi cumprido grande parte do que tinha planeado. Assim que consegui reunir a atenção dos alunos, após o momento de chegada e registo do sumário, dei início à discussão da tarefa trabalhada na aula anterior *Deslizando sobre o triângulo* (Anexo VI). Recorri ao *sketchpad,* tendo previamente construído no programa a problemática em estudo.

Para esta discussão, recorri também, por diversas vezes ao plano de aula que preparei, de forma a não me esquecer de destacar nenhuma ideia relevante. Tentei, aquando da sistematização das aprendizagens decorrentes da resolução da tarefa, envolver o maior número de alunos no processo. Os alunos puderam observar o gráfico que traduz a área do trapézio e do triângulo, em função do deslocamento de P, e compará-lo com o esboço que fizeram na sua resolução. Puderam, também, confirmar se as expressões encontradas traduzem as relações entre a área dos polígonos e o deslocamento x.

Após terminar a discussão e sistematização das aprendizagens, procedi à entrega e apresentação da Ficha de Trabalho N.º 3 (Anexo VIII). Junto com esta, entreguei também uma ficha informativa (Anexo XVII) que construí com as instruções da calculadora para realizar as seguintes ações: (1) escrever uma função na calculadora, recorrendo a uma função anterior; (2) criar um gráfico dinâmico (para calculadoras *Casio*); e (3) resolver equações de 2.º grau, a partir da sua forma canónica, $ax^2 + bx + c = 0$, (para calculadoras *Casio*). Esta ficha informativa surgiu após ter verificado em aulas anteriores que muitos dos alunos não sabiam ainda realizar este tipo de ações utilizando a calculadora, o que seria fundamental para a exploração da tarefa que propus. Para a construção da ficha, tive em conta as marcas e modelos de calculadoras existentes na turma.

Os alunos foram informados que a tarefa seria realizada em grupos – os mesmos que tinham trabalhado na aula anterior – e que teriam 30 minutos para o fazer, pelo que se seguiu a organização dos grupos na sala de aula. Aquando da realização da tarefa, fui interagindo com os grupos, tentando perceber quais as dúvidas que foram surgindo e fazendo o levantamento de questões que os pusessem a refletir sobre as mesmas. Apesar de surgirem, por diversas vezes, dúvidas técnicas sobre a utilização da calculadora gráfica, optei por esclarecê-las individualmente, uma vez que os alunos utilizavam uma variedade de aparelhos distintos.

Apesar de, novamente, a realização da tarefa se ter prolongado por mais tempo do que tinha previsto inicialmente, optei por interromper este momento quando me apercebi que a maioria dos alunos já tinha terminado. Não faria sentido distribuir a tarefa seguinte sem fazer a discussão e sistematização dos resultados da tarefa anterior. Decidi que haveria menos prejuízo para os alunos que vissem o seu tempo de resolução interrompido do que para os alunos que continuariam sem aproveitar o precioso tempo de aula, à espera que lhes fosse dado mais trabalho, se não o tivesse feito.

Desta forma, prosseguimos com a discussão coletiva da tarefa, com a colaboração dos alunos, a quem foi pedido que retomassem os seus lugares originais. Atentei à forma como estes se expressavam para explicar as transformações sofridas pelos gráficos da função, de acordo com a variação dos diferentes parâmetros. Expressões como “a função sobe 3 casas” ou “a função anda 5 para a direita” foram frequentes, pelo que tentei sempre apelar ao rigor na comunicação matemática, corrigindo estas expressões à medida que iam surgindo.

Terminada a discussão com recurso ao *sketchpad*, o que permitiu aos alunos ver, em tempo real, as transformações dos gráficos da função associadas a cada um dos parâmetros, houve um breve momento de sistematização da tarefa, em que estas associações foram, novamente, evidenciadas.

Terminada a tarefa, distribuí as fichas de trabalho relativas à tarefa seguinte. Uma vez que os alunos já estariam familiarizados com o tipo de exercício através da ficha que tinham agora terminado, optei por abreviar a apresentação da tarefa. Contudo, penso que não houve prejuízo para os alunos por o ter feito, uma vez que a tarefa era um desenvolvimento da tarefa anterior e, também porque, estive sempre disponível para tirar dúvidas individualmente, e fui sempre circulando pela sala de aula de forma a garantir que todos os alunos estavam ativos no seu trabalho.

Mais uma vez, não consegui prever acertadamente o tempo de duração da tarefa, pelo que tive de interromper a sua realização para terminar a aula. Teve, assim, que ser pedido aos alunos que terminassem a resolução da tarefa em casa, o que, para mim, não foi o cenário ideal. No entanto, pretendi que, assim, consolidassem os conhecimentos previamente adquiridos na fase de sistematização da tarefa anterior.

Reflexão sobre a aula n.º 2

Nesta segunda aula referente à minha intervenção letiva, fiquei um pouco mais apreensiva relativamente à forma como a aula decorreu. Ao longo do Mestrado, com todas as aulas que assisti e que lecionei, fui-me apercebendo que uma das minhas maiores fragilidades é a gestão da discussão de tarefas. Nesta aula, confirmei que ainda cometo algumas falhas na gestão deste tipo de discussão matemática.

Refletindo sobre o momento de discussão da tarefa *Deslizando sobre o Triângulo*, concluo que, muitas vezes, não cheguei ao cerne das questões que queria salientar, o que tem sido uma preocupação constante ao longo das aulas que tenho vindo a lecionar. A evidência de que "o gráfico da função tem, numa primeira fase, um crescimento mais rápido e, posteriormente, um crescimento mais lento" de nada serve aos alunos se não ficar clara a razão pela qual isto acontece. Outro exemplo, ainda mais simples, foi o facto de ter destacado a existência de dois triângulos semelhantes na figura, sem, no entanto, ter evidenciado de que triângulos se tratavam.

Este tipo de falhas leva-me a refletir sobre o quão importante é para qualquer professor – e ainda mais para um professor com a minha breve experiência profissional – fazer uma planificação da aula detalhada em que conste uma reflexão profunda sobre as tarefas a serem desenvolvidas em aula, sobre os objetivos pretendidos com cada uma delas e sobre os processos (neste caso, de questionamento), que devemos praticar para que os alunos consigam alcançar esses objetivos.

Outra das minhas preocupações foi o uso rigoroso da linguagem matemática. Sendo esta uma das maiores fragilidades de muitos dos alunos, o Professor não pode ter falhas a este nível, já que agrava a situação dos alunos, se forem expostos a uma linguagem matemática informal e pouco rigorosa. O facto de ter dito em aula repetidas vezes (sem me ter apercebido), "a função desloca-se para (…)" fez-me estar mais atenta a esta questão. Na aula seguinte tive a preocupação de corrigir, para todos os alunos, esta minha falha, transmitindo, uma vez mais, o quão importante é, desde já, que eles se esforcem por praticar sempre um discurso matemático o mais rigoroso possível.

Uma vez mais, refleti sobre a gestão de tempos em aula e sobre a elaboração de um plano de aula. Com todas as aulas que lecionei, aprendi que tenho que gerir melhor a extensão de tarefas que pretendo que sejam desenvolvidas em aula. Mais importante do que fornecer tarefas em quantidade aos alunos, é fornecer-lhe tarefas ricas no seu conteúdo, que lhes permitam tirar ensinamentos importantes.

Aula n.º 3 – 11 de Março de 2013 (90 minutos)

Uma vez que a conclusão da ficha de trabalho *Família de Funções Quadráticas II* (Anexo IX) ficou a cargo dos alunos, pareceu-me importante iniciar esta aula com uma sistematização dos tópicos trabalhados relativamente às transformações dos gráficos (1) da família de funções $f(x) = a(x-h)^2 + k$, associadas à variação dos parâmetros a, h e k, e (2) da família de funções $f(x) = (x-h)^2 + k$, associadas às translações segundo o vetor (h, k).

Recorri, novamente, ao programa *sketchpad*, para enriquecer esta sistematização e contei com a participação de alguns alunos que foram indicando, no quadro, onde se localizaria a parábola resultante da translação segundo um determinado vetor e, posteriormente, que escrevesse a expressão analítica cujo gráfico é a parábola transformada. Numa segunda fase da sistematização, pediu-se aos alunos que, dada uma expressão do tipo $g(x) = (x - h)^2 + k$, indicassem as coordenadas do vértice da função e o vetor segundo o qual sofreu uma translação. Pretendi, com estas questões, que os alunos conseguissem relacionar as coordenadas do vetor com (1) o deslocamento do gráfico da função, (2) o vértice da parábola e (3) a expressão analítica da função.

A sistematização ocorreu dentro do tempo previsto. Posteriormente, foi distribuída uma ficha de trabalho (Anexo X) e dada a indicação de que a primeira questão seria resolvida em conjunto e as seguintes seriam resolvidas a pares. Ainda que nestas aulas tenha havido sempre espaço para a sistematização dos tópicos trabalhados, e que tenha insistido nos exemplos práticos com a visualização através do *sketchpad*, este tópico das transformações de famílias de funções quadráticas não é fácil para os alunos, pelo que continuam a surgir dúvidas sobre conceitos que já pareciam estar consolidados:

> Professora: O que é que vocês me sabem dizer sobre a parábola da função f?
> Miguel: O a é positivo.
> Professora:… da função f.?
> Miguel: Sim, o a é positivo. … não!
> Professora: Repara, Miguel, no caso desta função [$y = x^2$], qual é o valor de a?
> (…)
> Miguel: É 1!
> Professora: E 1 é um valor positivo, certo?
> Miguel: Certo
> Professora: E para onde está voltada a parábola da função?
> Miguel: Para cima.
> Professora: Então, não há que enganar. Quando a parábola está assim [voltada para baixo], o a é…?
> Miguel: Negativo!
>
> [*registo de aula, 11 de Março de 2013]*

Os alunos ficaram, então, a resolver os restantes problemas a pares. No entanto, à medida que fui circulando, apercebi-me que estavam a surgir algumas dúvidas repetidas, pelo que decidi interromper a resolução para fazer um ponto da situação das dúvidas mais frequentes. A ficha acabou por ir sendo resolvida no quadro, dando sempre tempo para que os alunos pensassem nas questões antes de as resolver.

Enquanto os alunos trabalhavam de forma autónoma, fui circulando pela sala e vendo as conclusões tiradas pelos alunos. A dada altura apercebi-me que, na resolução de uma das alíneas, apenas uma aluna tinha optado por um método diferente do dos colegas. Encontrei aqui uma boa oportunidade para confrontar os alunos com um tipo de resolução distinto do que estavam todos a fazer com a colaboração da aluna:

> *Professora*: A Bárbara chegou lá, a partir os vértices das parábolas. Alguém chegou de outra forma?
> (Silêncio)
> *Professora*: Ninguém?! Francisca, acusa-te… ainda há pouco vimos que tinhas outro método.
> *Francisca*: Ah, eu fui ver a o ponto médio dos zeros.
> *Professora*: A Francisca disse que calculou os zeros e foi ver qual era a abcissa média entre os zeros da função. E o que é eu tinha essa abcissa média?
> *Francisca*: Era por onde passava o eixo de simetria.
> *Professora*: E disseste-me, também, que era onde estava o vértice da parábola. Portanto, já vimos aqui duas coisas: o eixo de simetria das parábolas tem a abcissa média entre os zeros da função; e também vimos que o vértice tem abcissa igual ao eixo de simetria.
>
> [*registo de aula, 11 de Março de 2013]*

Nesta aula, não foi possível concluir a ficha de trabalho proposta, pelo que a sua conclusão ficou adiada para a aula seguinte.

Reflexão sobre a aula n.º 3

Penso que, das cinco aulas que lecionei nesta intervenção letiva, esta foi a aula que me correu menos bem e com a qual fiquei menos satisfeita. Acredito que tenha sido por se tratar de uma aula com vários momentos de discussão e sistematização coletiva, uma vez que, conforme já disse anteriormente, é uma das minhas maiores fragilidades enquanto professora. Tendo já refletido sobre o meu papel nestes momentos de aula, após as aulas que já dei anteriormente, penso que, mesmo durante a minha intervenção me apercebi de que não estava a fazer o melhor que poderia, o que podia vir a prejudicar os meus alunos. Esse sentimento de frustração transparece para os alunos, quando estão focados no professor, pelo que a aula se tornou um pouco monótona e entediante. Este ambiente não é promotor de uma boa aprendizagem, que deve ser motivadora e desafiante.

Apesar de ter planeado as aulas, ter refletido sobre as tarefas em causa – até porque tive um papel fundamental na sua construção - e sobre as questões que deveria salientar aquando da discussão, cheguei a questionar-me sobre se estaria preparada para uma aula desta natureza.

Voltei a confrontar-me com a necessidade constante do detalhe na planificação de uma aula de um professor com uma curta experiência letiva. Quanto mais detalhada for essa planificação, maior número de situações distintas podem ser previstas pelo professor, fator que poderá afetar de forma positiva a sua confiança em aula e, principalmente, conseguir cumprir com o objetivo de concretizar aprendizagens consistentes nos alunos.

No entanto, fiquei satisfeita por ter conseguido envolver os alunos na sistematização dos tópicos trabalhados. Ao avaliar o trabalho que foram desenvolvendo autonomamente, em aula, consegui destacar questões pertinentes para serem esclarecidas em grande grupo, assim como resoluções que se distinguiram das restantes e que seriam mais-valias para o enriquecimento matemático dos alunos, caso fossem partilhadas.

Apercebi-me, também, nesta aula que o fato de querer que os alunos consigam concretizar as suas aprendizagens, leva-me, algumas vezes, a dar respostas antecipadas que deveriam ser dadas pelos alunos. Apressar a linha de raciocínio dos alunos não os ajuda, pelo contrário, pois deixam de refletir sobre as questões.

Terminei esta aula com uma enorme vontade de preparar a aula seguinte de forma a corrigir todas estas debilidades e tornar os momentos de aprendizagens mais motivadores para os meus alunos.

Aula n.º 4 – 13 de Março de 2013 (90 minutos)

Na quarta aula da minha intervenção letiva, após o registo do sumário no quadro, comecei por fazer com os alunos a sistematização das aprendizagens realizadas na aula anterior. Apesar da ficha de trabalho *Família de Funções Quadráticas III* (Anexo X) não ter sido concluída, foi mais importante organizar os conhecimentos adquiridos sobre o tópico em questão. Além de querer garantir que esta sistematização seria feita – uma vez que, na segunda parte da aula seria de avaliação – ajudaria, também, na resolução dos exercícios da ficha que estavam pendentes.

Apesar dos alunos estarem um pouco mais inquietos, por que se seguiria um momento de avaliação, a discussão dos conceitos desenvolvidos na aula anterior fluiu com grande naturalidade e os alunos mostraram-se bastante contributivos e participativos.

Nesta sistematização, foi evidenciada a relação entre as coordenadas do vetor com (1) o deslocamento do gráfico da função, (2) o vértice da parábola, (3) a equação do eixo de simetria da parábola e (4) a expressão analítica de uma função do tipo $y = a(x - h)^2 + k$. Foi, também, estudada a relação entre a parábola com expressão analítica $ax^2 + bx + c$, o seu eixo de simetria e as coordenadas do seu vértice.

De seguida, pedi aos alunos que concluíssem, a pares, a ficha de trabalho que iniciámos na aula anterior, dando-lhes tempo para a resolução de cada um dos exercícios que iam sendo corrigidos no quadro, à medida que os alunos os iam concluindo.

Como estava planeada, para o segundo tempo da aula, a realização da 8ª Minificha de Avaliação, muitos alunos aproveitaram o tempo em que ia verificando o desenvolvimento dos exercícios propostos para exporem dúvidas sobre tópicos dados anteriormente. Embora, por um lado, quisesse manter-me fiel ao plano de aula que tracei – uma vez que achava importante que a tarefa ficasse concluída, para consolidação dos conhecimentos dos alunos – por outro lado, aproveitei para esclarecer algumas questões rápidas, quando as considerei pertinentes. No entanto, relembrei os alunos de que, no dia anterior, teria havido Oficina da Matemática, pelo que a deveriam ter aproveitado para esclarecer esse tipo de dúvidas com mais tempo para assimilar as explicações dadas.

A resolução da ficha foi concluída dentro do tempo previsto. Pedi aos alunos que, ordenadamente, arrumassem os seus materiais. Ao longo do ano, sempre que existiram salas disponíveis, os alunos realizaram as minifichas e testes de avaliação distribuídos por duas salas de aula – a presença, em sala, de três professoras facilitou bastante esta gestão. Assim, os alunos, já habituados a este procedimento, distribuíram-se de livre vontade pelas duas salas, ficando eu responsável por uma das salas e a minha colega de estágio pela outra.

Assim que os alunos se organizaram, procedi à entrega dos enunciados da Minificha (Anexo XIII). Pedi aos alunos que a lessem e expusessem qualquer dúvida de interpretação que pudesse surgir, para que todos os alunos fossem esclarecidos de igual forma. Iniciada a realização da Minificha de avaliação, os alunos não deviam colocar dúvidas. Coube-me fazer essa gestão, de forma a não prejudicar nem beneficiar nenhum aluno. A realização da Minificha ocorreu sem qualquer contratempo e os alunos foram entregando as suas resoluções à medida que iam terminando.

Reflexão sobre a aula n.º 4

Considero que esta aula correu bastante melhor que a anterior. Apesar de ter ficado muito descontente com o meu desempenho na aula anterior, e pela forma como decorreu a aula, penso que a reflexão que fiz sobre o que correu menos bem e sobre o que teria de melhorar deu, realmente, frutos. Na verdade, reforcei intensivamente a planificação da sistematização dos tópicos trabalhados nas fichas fornecidas aos alunos, indaguei sobre as questões que fariam sentido colocar aos alunos e sobre aquelas que os conduziriam a tirar as conclusões necessárias. Isto fez com que estivesse mais confiante na sala de aula, no momento de discussão, em que via exposta uma grande fragilidade. Apesar de saber que ainda tenho muito que trabalhar nesta área, penso que consegui manter a aula com um bom ritmo de trabalho, mantendo os alunos focados e interessados.

O facto de os alunos terem um momento de avaliação que ocupava metade da duração da aula, fez com que o tempo estivesse bastante mais limitado, pelo que também me terei obrigado a ser mais rigorosa com os tempos que planeei para cada objetivo da aula, resistindo, assim, à tentação de deixar os alunos prolongarem o tempo das suas resoluções.

Numa turma de 30 alunos, em que a heterogeneidade é bastante acentuada, existem alunos com ritmos de trabalho bastante distintos, o que pode causar alguns constrangimentos ao professor. Se o professor não pode conduzir a aula ao ritmo do aluno de rápida compreensão que cumpre os tempos ideais para cada tarefa planeada sem prejudicar os alunos que têm alguma dificuldade na disciplina, não pode, também, basear-se no ritmo de trabalho de um aluno que tenha mais fragilidades sem desmotivar os alunos mais empenhados. Um professor é confrontado com este tipo de questões em todas as aulas que leciona, pelo que é levado a tomar várias decisões em cada aula. Essas decisões são basilares na forma como decorre a aula, na forma como se motiva os alunos e na forma como estes concretizam as suas aprendizagens. O professor tem, a seu cargo, muita responsabilidade, e, não havendo decisões certas ou erradas, a melhor decisão é a tomada em consciência, resultante da prática reflexiva constante.

Aula n.º 5 – 13 de Março de 2013 (90 minutos)

A última aula da minha intervenção letiva foi um pouco atípica, uma vez que, cerca de metade dos alunos da turma não esteve presente. Estes alunos estavam inscritos num torneio de voleibol. Tratava-se, também, do último dia de aulas do 2.º período letivo, pelo que os alunos presentes estavam pouco focados na aula.

Para esta aula planeei uma tarefa com o objetivo dos alunos explorarem, uma vez mais, as propriedades do gráfico de uma função no contexto de um problema. Os alunos não foram confrontados com novos conceitos, mas recordaram aprendizagens previamente adquiridas através da exploração de uma nova problemática.

Com recurso ao *sketchpad*, a turma observou uma animação que ilustra a situação descrita na tarefa "Deslizando sobre a diagonal" (Anexos XI e XII). Pedi-lhes, de seguida, que esboçassem um gráfico que traduzisse a variação da área do polígono formado pela zona sombreada em função do deslocamento de um ponto. Pedi também que acompanhassem o gráfico com um pequeno texto explicativo das opções tomadas quanto às propriedades da função. Este tipo de tarefa pretende desenvolver a capacidade de produzir composições matemáticas.

Terminado o tempo que estabeleci para a realização desta pequena tarefa, recolhi as resoluções individuais dos alunos, antes realizarmos a discussão da mesma, uma vez que pretendia ficar com o registo da primeira abordagem que os alunos fizeram ao problema.

De seguida, distribuí as fichas de trabalho (Anexo XII) e, uma vez que a problemática já tinha sido apresentada através da animação, os alunos começaram a sua resolução de imediato.

Enquanto os alunos realizavam a tarefa, eu circulei pela sala, averiguando quais as dúvidas que iam surgindo e as abordagens que os alunos faziam. Estive, também, atenta ao uso de justificações que se revelou escasso, embora tenhamos insistido ao longo dos dois períodos de aulas no quão fundamental é justificar todas as opções tomadas aquando da resolução de problemas. Os alunos continuavam ainda, de forma regular, a não justificar as suas respostas.

Professora: Já fizeram a primeira alínea?
Francisca: Já.
Professora: E que método seguiram?
Ana: Fomos achar a razão de semelhança.
Professora: Qual razão de semelhança?
Francisca: Entre a base e a altura.
Ana: Exato!

Professora: Porque é que puderam usar essa razão de semelhança?
Francisca: Porque são semelhantes.
Professora: E onde é que escreveram isso?
Francisca: Mas nós sabemos, "stora"..
Professora: E como é que eu sei que vocês sabem? Vamos ter de justificar essas respostas…

[*registo de aula, 14 de Março de 2013*]

Alguns alunos tiveram dificuldades no cálculo algébrico necessário à concretização de algumas alíneas do problema descrito, situação que tornou a resolução da ficha mais demorada, pelo que não tiveram tempo de voltar a desenhar o gráfico da função – a mesma função da qual foi feito um esboço gráfico. Tratava-se da última questão da ficha, mas era essencial para que os alunos confrontassem a sua perceção inicial com a conclusão retirada de um estudo rigoroso da função. Para colmatar este imprevisto, pedi aos alunos que vissem na calculadora gráfica como seria o gráfico desta função.

Dei, assim, início ao momento de discussão da tarefa. O facto de estarem apenas metade dos alunos da turma, tornou esta discussão mais calma e, curiosamente, permitiu que mais alunos interviessem.

A variação do crescimento do polígono a sombreado suscitou algumas dúvidas entre os alunos. Verifiquei que, alguns alunos que mostravam ter compreendido a questão, mostravam alguma dificuldade em comunicá-la.

Professora: Portanto, vocês veem o ponto P a deslocar-se para cima, não é? E a área a aumentar…
Alunos: Sim.
Professora: E de que forma a área aumenta, à medida que se desloca o ponto P?
João: Vai aumentando até chegar ao [*DB*], e quando passa pelo M, continua a aumentar, mas diminui a intensidade. (…) diminui a inclinação.
Professora: A inclinação? O que é que queres dizer com isso?
João: Estava a crescer a um ritmo constante, e depois é como se invertesse.
Professora: Constante?
João: Cresce a um ritmo constante, mas não é proporcional!
(…)
Bárbara: A área cresce mais depressa até ao meio e mais devagar depois.

[*registo de aula, 14 de Março de 2013*]

Foi, também discutida a necessidade de definir a função utilizando mais do que uma expressão algébrica, em função do domínio considerado.

Terminada a discussão, e uma vez que faltavam poucos minutos para terminar, procedi à entrega das minifichas de avaliação realizadas na aula anterior. Aquando da entrega, alertei os alunos para alguns dos erros mais frequentes que surgiram nas suas resoluções.

Reflexão sobre a aula n.º 5

A última aula da minha intervenção decorreu de forma muito calma. O facto de estarem apenas metade dos alunos na sala teve bastante influência. Se, por um lado, alguns alunos se poderão sentir mais expostos – sendo menor o número de alunos em aula, o professor consegue estar mais atento a cada um deles – por outro, alguns alunos poderão sentir-se menos inibidos a participarem dos momentos coletivo, pois estão rodeados por menos colegas.

Ao refletir sobre a minha aula, não posso deixar de destacar, uma vez mais, o momento da discussão da tarefa. Apesar de, durante este momento em aula, a discussão estar, aparentemente a fluir com naturalidade, é quando me questiono acerca do sucesso da aula que me surgem uma série de questões que gostaria de ter tratado de outra forma. Deste modo, saliento alguns aspetos negativos que ocorreram durante a discussão desta tarefa:

(1) A questão da variação do crescimento da área do polígono sombreado criou bastante discussão entre os alunos. Uma das alunas disse ter admitido, inicialmente, que esta variação seria constante. Esta questão deveria ter sido explorada, por exemplo, mostrando uma situação em que o crescimento fosse constante e tentando perceber a diferença entre as duas situações;

(2) O facto do crescimento da função ter sido classificado como “mais rápido” ou “mais devagar”, ficou pouco claro para os alunos;

(3) Um dos alunos interveio com a ideia de que a função representava áreas diferentes em partes diferentes do domínio. O significado matemático desta afirmação deveria ter sido discutido com todos os alunos. A questão era bastante importante e foi subaproveitada em aula;

(4) Houve um momento da discussão em que me centrei apenas no aluno que me estava a responder. A discussão deixou de ser coletiva e, por breves minutos, passou a ser um diálogo entre duas pessoas. Estes

> minutos são suficientes para perder o foco dos alunos que não estão a compreender algum dos pontos discutidos ou que se sentem alheios ao diálogo que está a acontecer.

No entanto, sei que a minha intervenção nestas cinco aulas teve uma evolução positiva. Sei que ainda tenho muito para melhorar e para isso vou necessitar ganhar bastante prática neste tipo de situações. Noto, porém, estar com uma postura mais confiante ao fazer este tipo de exercício, encarando melhor os alunos e tornando estes momentos para si mais entusiasmantes. Também a gestão da minha aula foi alvo de algumas melhorias. Passei a ter mais atenção à marcação dos tempos de aula. Esta preocupação permite ao professor incutir ritmo de trabalho nas suas aulas, para que estas sejam melhor aproveitadas.

Comentário reflexivo global

Não queria terminar este capítulo sem salientar algumas das aprendizagens que fui edificando ao longo de toda a minha intervenção letiva. Com o distanciamento que já tenho da intervenção, e após uma reflexão sobre o trabalho que desenvolvi e as aulas que proporcionei aos meus alunos, continuo a acreditar que os momentos de discussão de tarefas são aqueles em que me sinto menos confortável, pelo que sinto necessidade de continuar a investir na minha formação neste sentido.

É claro que, este investimento passa, fundamentalmente, pela prática deste tipo de tarefas em situação de aula, no entanto, uma boa preparação da tarefa pode ser o primeiro passo para o cumprimento dos seus objetivos. Durante o tempo de preparação, o professor deverá consciencializar-se da ideia matemática que está a ser explorada, e colocar-se no papel do aluno questionando "porquê?" a todos os argumentos utilizados na resolução da tarefa. Caso contrário, corre o risco de não ser abordado o cerne da questão, o que inviabiliza o objetivo da mesma.

A necessidade desta preparação exaustiva deste tipo de tarefas é acentuada se pensarmos que, ao estar melhor preparado, o professor vai sentir-se mais capaz e confiante para conduzir este tipo de discussão. No entanto, há que ter em mente que um professor pode ser confrontado com uma questão que desconhece. Neste caso, admitir que não se sabe é uma responsabilidade profissional. O professor poderá assumir essa lacuna e torná-la um desafio para o aluno e para si próprio.

Outro cuidado a ter na prática deste tipo de tarefa é em relação ao papel do professor nos momentos de trabalho autónomo dos alunos. Neste momento deve ser feito um levantamento do tipo de resoluções que vão surgindo e que são propícios à discussão coletiva. O professor deve ir analisando as resoluções no sentido as aproveitar adequadamente em aula. Deve, também, insistir que os alunos partilhem as suas justificações, levando-os a desenvolver a sua comunicação matemática.

Na discussão em si, o professor deve ter em mente que a aula tem que ser produtiva para todos os alunos. Centrar a sua atenção no aluno que está a responder não é uma boa prática, pois pode criar-se algum desinteresse por parte dos outros alunos. O Professor deve estar, também, atento aos comentários erróneos que poderão eventualmente ser feitos durante a discussão. É tão importante para a aprendizagem dos alunos aquilo que fazem bem, como aquilo que fazem mal. Os comentários erróneos por parte dos alunos são uma ótima fonte de aprendizagem e um excelente meio para clarificar o entendimento.

Estas cinco aulas foram para mim, uma grande fonte de ensinamentos que espero, ao longo da minha vida, poder sempre aplicar.

Instrumentos e Procedimentos para Recolha de Dados

Sendo este estudo de índole investigativa, um dos obstáculos com que me deparei foi a conciliação entre o meu papel de professora e o meu papel de investigadora. É essencial, para a realização de uma investigação imparcial, a distinção entre estes dois papéis que tive de desempenhar. Com o intuito de minimizar as possíveis consequências deste confronto, optei pela diversificação de instrumentos de recolha de dados: a observação de aulas, acompanhada da gravação áudio de momentos da aula; e a recolha documental das produções escritas dos alunos.

Sendo a minha investigação desenvolvida no contexto de lecionação de aulas, pareceu-me obrigatório a recolha de dados através da observação de aulas. O registo destas observações é dificilmente conciliável quando se está a conduzir a aula, pelo que, no final de cada aula, fiz pequenos registos de momentos que considerei mais notórios. A melhoria do registo de cada aula foi realizada aquando dos momentos de análise e reflexão que se seguiram a cada aula, com a colaboração da Professora Doutora Leonor Santos, orientadora pedagógica; do Professor Doutor João Pedro Boto, coorientador cientifico; da Doutora Ana Vieira, professora responsável pela turma e coorientadora de estágio; e da minha colega de estágio. Desta forma, pude destacar episódios ou intervenções dos alunos que sejam relevantes para que possa refletir sobre as questões-objetivo da minha investigação.

Ainda em contexto de sala de aula, uma vez que este trabalho investigativo assenta na comunicação matemática e no trabalho de grupo, optei, também, pela gravação áudio do trabalho autónomo de dois grupos de alunos. Estas gravações permitiram obter dados que possibilitam a análise das interações dentro dos grupos, na tentativa de compreender de que forma é que os alunos produzem explicações escritas quando trabalham em grupo, assim como quais as dificuldades associadas a este tipo de exercício. Apesar de, durante a realização das tarefas, interagir diretamente com os grupos, esses momentos não são suficientes para reter as informações necessárias à formação de elações sobre o assunto.

Dada a limitação de recursos que impedia o registo da gravação áudio de todos os grupos de alunos, precisei selecionar quais os grupos a investigar de forma mais aprofundada. Para este efeito, tive em consideração alguns critérios de seleção, sendo estes: a heterogeneidade a nível de aproveitamento escolar e a discrepância no tipo de intervenções / participação que faziam ao longo das aulas, segundo a minha observação.

Como estudado por Nunes (1997), é mais vantajoso trabalhar com grupos de alunos em que pelo menos um elemento tenha bons resultados académicos e pelo menos um elemento não tenha qualquer dificuldade em exprimir o seu raciocínio ou as suas dúvidas. Pretende-se que se gerem situações que exijam a interação de todos os constituintes do grupo. Neste sentido, precisei ter um papel ativo na constituição dos grupos, fazendo algumas alterações aos grupos formados habitualmente pelos alunos, de forma a assegurar que cada grupo tivesse estas características.

No que respeita à recolha documental, foi imprescindível para a realização do trabalho investigativo sobre a comunicação matemática escrita dos alunos, a recolha das produções escritas dos mesmos, tanto em momentos de trabalho de grupo, como em momentos de trabalho individual. A análise destes documentos será o ponto-chave da minha investigação.

Quanto às produções individuais dos alunos, embora a dimensão reduzida deste estudo não me permita tirar elações no que respeita ao contributo do trabalho de grupo para a evolução individual do aluno, no âmbito da comunicação escrita, estas forneceram-me algumas noções sobre alunos em particular, no que respeita ao desenvolvimento desta capacidade.

ANÁLISE DE DADOS

Sendo o meu principal objetivo compreender, com este estudo, algumas das características da capacidade de comunicação matemática escrita no 10.º ano de escolaridade, em contexto de trabalho de grupo, procurei dar resposta às seguintes questões:

(i) Qual o rigor da linguagem matemática que usam alunos do 10.º ano quando comunicam de forma escrita em trabalho de grupo? Usam terminologia matemática simbólica e vocabulário formal? Quais as principais dificuldades que apresentam?

(ii) De que forma produzem os alunos explicações escritas quando trabalham em grupo? Quais as principais dificuldades que apresentam?

(iii) Que tipo de representações – algébrica ou gráfica – são mais frequentemente trabalhadas pelos alunos? Quais as principais dificuldades associadas à abordagem algébrica e à abordagem gráfica?

Para encontrar respostas a estas questões, baseei-me nas produções escritas e nas gravações áudio que recolhi durante a minha intervenção letiva com a turma do 10.º ano. Estes dados foram recolhidos aquando da resolução das tarefas propostas em aula. Posteriormente, foram analisados de forma a selecionar as intervenções mais pertinentes face ao contexto deste estudo.

Estruturei esta análise em três tópicos distintos:

- Linguagem Matemática;
- O trabalho de grupo e as explicações escritas;
- Abordagens seguidas pelos alunos.

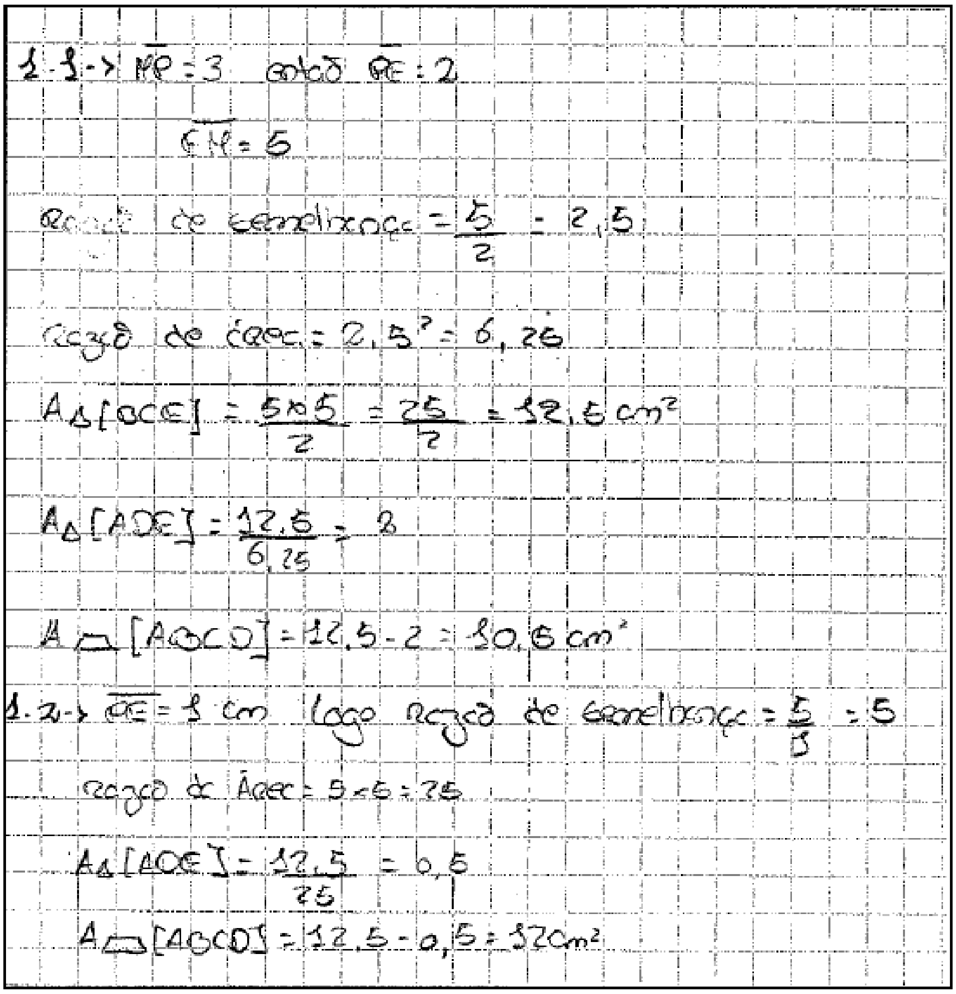
Uma vez que, as produções escritas dos anos derivam da resolução de tarefas realizadas em aula, alguns dos exemplos selecionados serão discutidos em mais do que um dos tópicos apresentados.

Linguagem Matemática

Neste tópico vou explorar, através das produções escritas dos alunos, que tipo de linguagem matemática é usado com maior frequência – formal ou informal. Vou também identificar quais as dificuldades dos alunos relacionadas com a forma como se expressam na escrita.

Uma das questões que atentei foi a forma como os alunos estruturam as suas resoluções. Se, por um lado, alguns alunos se preocupam em organizar o seu raciocínio, e escrevem de forma a sua resolução estar percetível para ser consultada mais tarde, seja pelo próprio, seja por terceiros, por outro lado, existem muitos alunos que não revelam ter esta preocupação. Alguns destes, demostram alguma organização na sua resolução através de uma sequência de passos, sem, no entanto, interligá-los – o que dificulta a sua perceção – enquanto que outros, apresentam produções escritas bastante desorganizadas, sem sequência lógica entre os passos seguidos, dificultando a compreensão da sua linha de raciocínio.

Apresento, de seguida, o exemplo da resolução individual de duas alunas que trabalharam no mesmo grupo e que apresentam resoluções idênticas, no entanto, com formas de organização de informação distintas.


1.1-> $\overline{AP} = 3$ então $\overline{PE} : 2$

$\overline{EA} = 5$

Razão de semelhança $= \frac{5}{2} = 2,5$

Razão de área $= 2,5^2 = 6,25$

$A_{\triangle}[BCE] = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12,5\ cm^2$

$A_{\triangle}[ADE] = \frac{12,5}{6,25} = 2$

$A_{\square}[ABCD] = 12,5 - 2 = 10,5\ cm^2$

1.2-> $\overline{PE} = 1$ cm logo razão de semelhança $= \frac{5}{1} = 5$

razão de área $= 5 \times 5 = 25$

$A_{\triangle}[ADE] = \frac{12,5}{25} = 0,5$

$A_{\square}[ABCD] = 12,5 - 0,5 = 12\ cm^2$

Figura 5 - Resolução da Ana, Ficha n.º 1 - exercícios 1.1. e 1.2.

Na Figura 5, a aluna preocupou-se em transportar para a linguagem escrita a linha de raciocínio que seguiu na resolução do problema. No exercício 1.1., a expressão “então” mostra uma conexão entre a linguagem usada no dia-a-dia e a linguagem matemática formal. A aluna pretende evidenciar a implicação entre a medida de [MP] e a medida de [PE], indo assim ao encontro do cumprimento das regras de demonstração e de justificação. No exercício 1.2., o mesmo é evidenciado pela expressão “logo”.

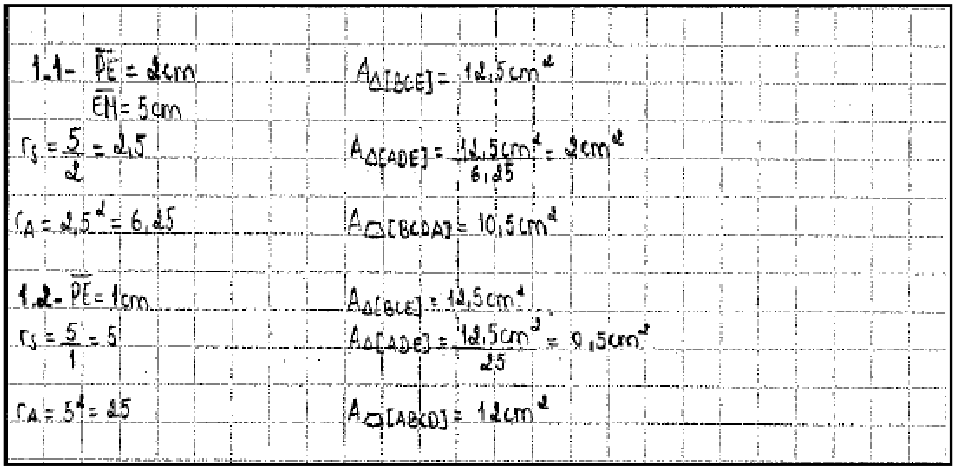


Figura 6 - Resolução da Francisca, Ficha n.º 1 - exercícios 1.1. e 1.2.

Na Figura 6, a aluna não recorreu à utilização de quaisquer conectores que ajudem o leitor da resolução a encontrar a sua linha de raciocínio. Todavia, a resolução está bastante completa, na medida em que explicita todos os cálculos necessários para dar resposta ao problema. Há também uma preocupação na organização espacial que é favorável à leitura e evidencia a sequência de passos que a aluna efetuou na sua resolução. No exercício 1.2. este tipo de linguagem escrita repete-se.

Atendendo ao rigor da linguagem matemática escrita usada nas resoluções, estas duas alunas evidenciam ser capaz de usar uma linguagem cuidada. Exemplo disso é a determinação do cálculo das áreas – apesar de se servirem do desenho do polígono, indicam também os seus vértices para os identificarem. Além disso, existe a preocupação em apresentar as unidades de medida utilizadas.

Na Figura 7, a aluna revela já ter uma capacidade de comunicação escrita próxima do que é exigido no ensino secundário. A aluna recorre ao uso de vocabulário formal e terminologia matemática simbólica, exemplo disso é o uso da expressão “c.q.d”.

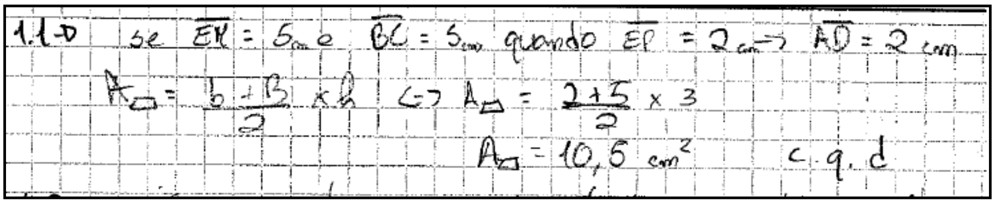


Figura 7- Resolução da Beatriz, Ficha n.º 1 – exercício 1.1.

Na última aula da minha intervenção letiva, com o objetivo de avaliar a capacidade de comunicação escrita dos alunos, propus uma tarefa (Anexo XI), que consiste na elaboração de uma breve composição matemática em que os alunos teriam de explicar as opções tomadas relativamente ao esboço do gráfico que desenharam. Seguem-se as produções escritas de dois alunos que fizeram uma análise correta da problemática, porém, apresentam tipos de linguagem e níveis de rigor bastante díspares.

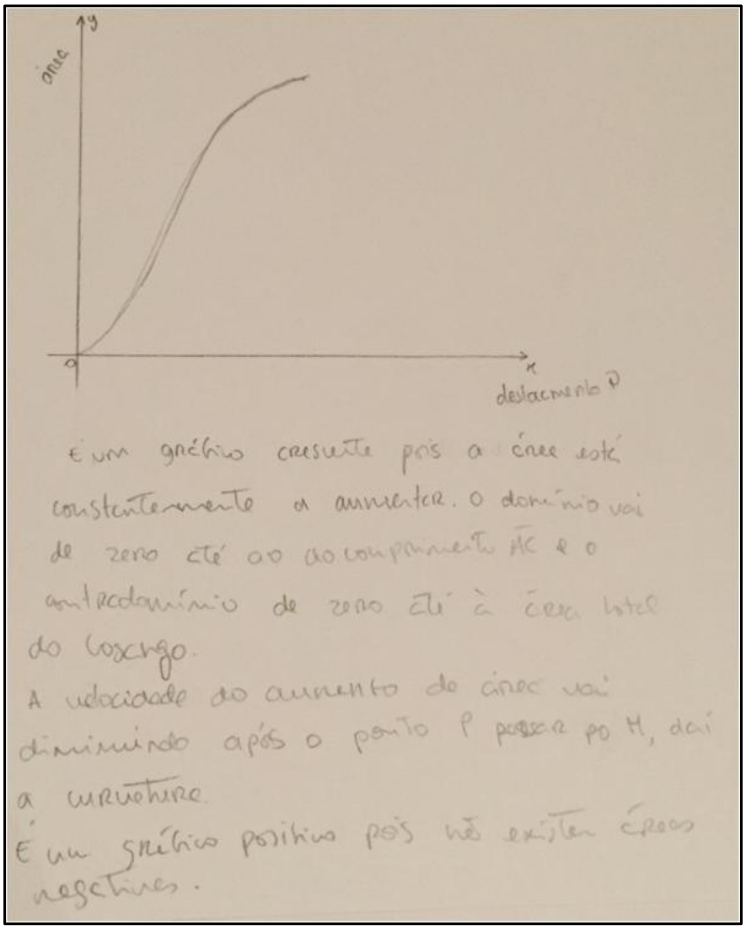


Figura 8 - Resolução do João – Esboço do gráfico *Deslizando sobre a diagonal*

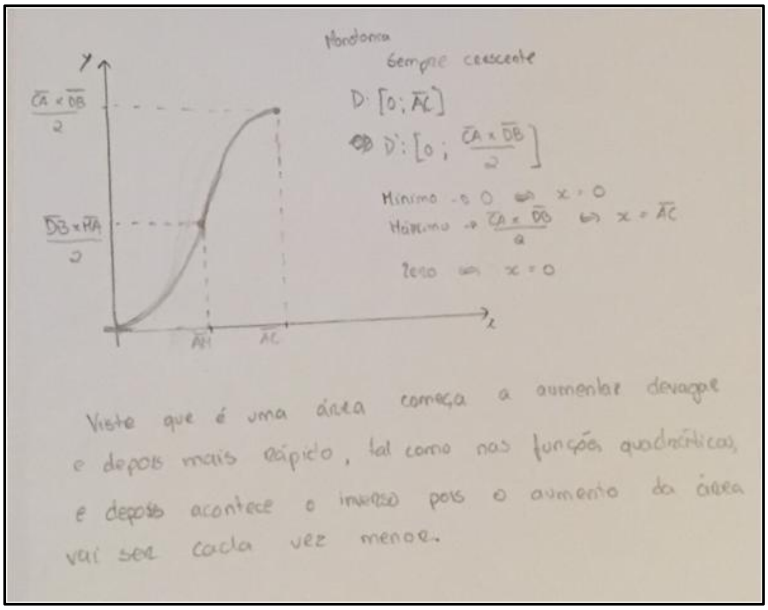


Figura 9 - Resolução Luís – Esboço do gráfico *Deslizando sobre a diagonal*

Nas Figuras 8 e 9, ambos os alunos indicam a monotonia, domínio e contradomínio com bastante precisão. No entanto, o vocabulário utilizado pelo João assemelha-se muito à linguagem do dia-a-dia, sendo bastante informal na sua resposta. Já o Luís serve-se da terminologia matemática simbólica, evidenciando a sua preocupação em dar respostas com algum rigor. Note-se que, enquanto o João escreve "o contradomínio vai de zero até à área total do losango", o Luís indica "$D'\colon \left[0; \frac{\overline{CA} \times \overline{DB}}{2}\right]$".

De salientar, também, o rigor com que ambos os alunos elaboram a sua representação gráfica, identificando as suas variáveis e, no caso do Luís, identificando os pontos importantes do gráfico, de acordo com o contexto do problema.

Analisando a resolução de outra aluna, posso identificar alguma confusão no uso da terminologia matemática simbólica. Na Figura 10, a aluna identifica o domínio como sendo o segmento de reta onde o ponto P se desloca e o contradomínio como o losango.

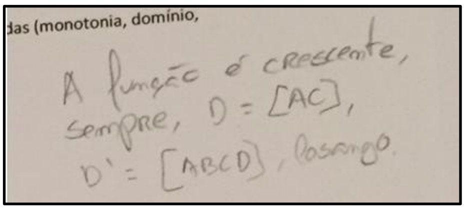


Figura 10 - Resolução da Beatriz – Esboço do gráfico *Deslizando sobre a diagonal*

Ao acompanhar a aluna nesta aula, ficou claro que pretendia indicar o domínio e o contradomínio corretos da função. No entanto, ao indicar por escrito a sua resposta, a aluna não soube aplicar a terminologia matemática simbólica correta que traduzia a linha de raciocínio que seguiu. A discussão, em aula, com a aluna, permitiu clarificar que esta soube identificar que valores tomavam o domínio e contradomínio da função neste contexto. No entanto, na sua produção escrita, a aluna não identificou o domínio e o contradomínio como intervalos numéricos. No caso do domínio, identificou-o como sendo um segmento de reta e, no caso do contradomínio, a aluna identificou-o como sendo um polígono, o losango [ABCD].

Ainda em relação à tarefa Esboço do gráfico – *Deslizando sobre a diagonal*, não posso deixar de destacar a resolução de uma das alunas, que demonstrou ser bastante metódica. Na Figura 11, apesar de a aluna não ter feito uma interpretação correta do crescimento da função, revela preocupação em organizar a sua produção escrita por tópicos, de forma a justificar cada uma das suas opções.

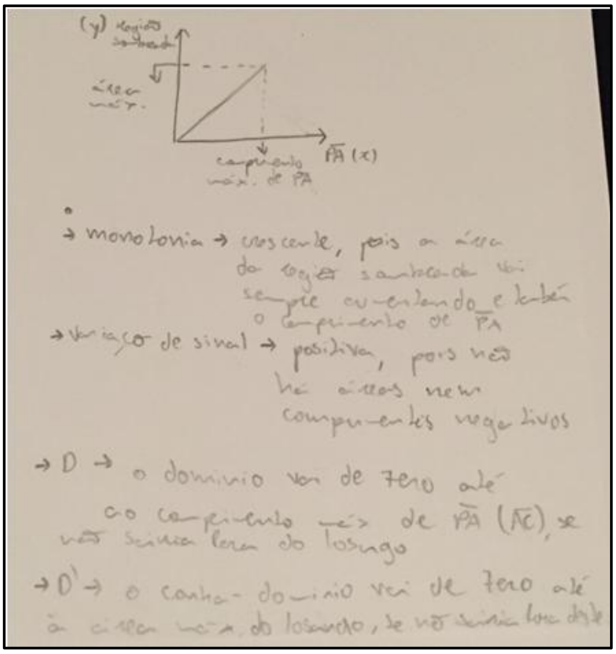


Figura 11 - Resolução da Sofia – Esboço do gráfico *Deslizando sobre a diagonal*

Noto que, na sua produção escrita, a aluna recorre a uma mistura de vocabulário formal – “comprimento máximo de $\overline{PA}$” – e informal – “o domínio vai de zero à área máxima do losango, senão, sairia fora deste”. No entanto, revelou ter dificuldades no que respeita ao uso da terminologia matemática, ao referir-se ao comprimento do segmento de reta de extremos P e A ($\overline{PA}$), quando pretendia apenas indicar o segmento de reta de extremos P e A ([PA]).

Pude observar que a maioria dos alunos recorre ao uso de vocabulário informal nas suas produções escritas, por meio da utilização de desenhos para fundamentar o seu raciocínio (Figura 12) e/ou por meio da aproximação à linguagem do dia-a-dia (Figura 13). Na tarefa acima referida, os discursos “aumenta mais rapidamente até a DB e diminui depois deste” e “o gráfico que eu fiz é assim porque ao início a área sombreada aumenta rápido até certo sitio (metade do losango) e depois aumenta mais devagar” são representativos do tipo de vocabulário mais frequentes entre os alunos nas suas produções escritas. Este cenário verificou-se ao longo de todo o ano letivo, aquando da realização das tarefas propostas, bem como nos testes e minifichas.

O Trabalho de Grupo e as Explicações Escritas

Neste tópico exploro, através das produções escritas dos alunos e das gravações de áudio que registaram a interação dos alunos em momentos de trabalho de grupo, de que forma os alunos interagem entre si e que influência tem esta metodologia nas produções escritas dos alunos. Irei também identificar com que obstáculos os alunos se deparam ao realizar produções escritas em contexto de trabalho de grupo.

Para a análise deste tópico vou focar-me em dois dos grupos de alunos, formados em aula, mais representativos da heterogeneidade, a nível de aproveitamento escolar. Este fator leva a que o desenvolvimento das aprendizagens tenha maior sucesso. Daqui em diante, vou referir-me aos grupos de trabalho como Grupo 1 e Grupo 2.

Após a análise dos registos destes grupos e observação da sua interação em aula, pude verificar que estes apresentam formas bastante distintas de trabalhar em grupo. No que respeita ao Grupo 1, observei que a sua forma de trabalhar foi bastante cooperativa. Ao receberem uma tarefa, as alunas lêem-na em conjunto, desta forma, garantem que todas compreendem o enunciado. As alunas entendem que, ao estarem a trabalhar em grupo, a produção escrita que realizam individualmente vai ser representativa do trabalho de todos os elementos do grupo, pelo que, antes de proceder ao registo da resolução de um problema, discutem a melhor forma de o apresentar, garantindo, assim, a concordância dos registos elaborados tanto na estrutura como no conteúdo.

Ao iniciarem a resolução de uma tarefa, as alunas do Grupo 1 discutem a abordagem que querem tomar, como exemplifico no episódio a seguir transcrito:

> *Francisca*: Então olha só, se nós fizermos a razão de semelhança das duas alturas, sabemos que a razão da área é o quadrado, por isso já não precisamos de fazer o teorema de Pitágoras, assim é mais rápido.
> *Bárbara*: Sim, porque a razão de semelhança entre as áreas é a razão de semelhança ao quadrado. Fica mais fácil.
> *Ana*: Mas o teorema de Pitágoras é uma teoria.
> *Bárbara*: Sim, mas esta é mais rápida e tu, num teste, não tens assim tanto tempo para resolver isso.
>
> [*registo em aula, 6 de Março de 2013*]

Outro aspeto bastante positivo no Grupo 1 é o facto de nenhuma das alunas aceitar a resolução sugerida por um dos elementos sem que a compreendesse e concordasse em seguir essa linha de raciocínio. Após acordar a linha de raciocínio que iriam seguir e elaborarem o registo escrito individual, ainda houve espaço para que, entre as alunas alertassem para detalhes que necessitassem ser melhorados, tais como, a indicação de unidades de medida nos cálculos efetuados ou da resposta ao problema.

Em contraponto, o Grupo 2, revelou uma forma de trabalhar bastante individualista. Ao receberem uma tarefa, os alunos iniciam a leitura individual e partem para a resolução sem discutir qual a interpretação de cada um sobre aquilo que é pedido. O registo em áudio da interação destes alunos revelou que estes só dialogavam referindo-se à tarefa com a finalidade de comparar resultados obtidos ou na situação em que um dos elementos não estivesse a conseguir resolvê-la. Ainda assim, são alunos que partilham as suas resoluções e explicam o seu raciocínio, caso um dos elementos necessite de ajuda.

> *Inês*: Então mas como é que nós explicamos isto?!
> *Luís*: Eu pus medida da base igual à medida da altura, por semelhança de triângulos, então, $5 - 3 = 2\ cm$ que é igual à medida da base do trapézio, a base menor do trapézio.
> (…)
> *Beatriz*: O 1.4 como é que vocês fizeram?
> *Matilde*: Eu ainda não fiz nada…
>
> [*registo em aula, 6 de Março de 2013*]

De notar, no exemplo acima descrito, que o discurso do aluno, na primeira pessoa, reforça a perceção de que não houve qualquer partilha de ideias que antecedessem à resolução.

Um dos elementos deste grupo é um aluno de excelência e outro dos elementos é uma aluna com fraco aproveitamento à disciplina, tendo, assim, o grupo uma grande discrepância na forma como encaram as tarefas propostas em aula. A forma de trabalhar do Grupo 2 evidencia a grande disparidade entre os ritmos de trabalho dos quatro elementos. No registo das gravações áudio deste grupo existem muitos momentos em que o aluno de excelência inicia conversas que nada têm a ver com a aula de matemática, nem com a tarefa a realizar. O aluno, nos momentos em que se vê "obrigado" a esperar que os restantes elementos do grupo terminem a tarefa – muitas vezes porque lhe é pedido pelas colegas – tende a distrair-se (e distrair outros alunos) e subaproveita o tempo em aula. Existem, também, momentos em que a aluna com aproveitamento mais fraco não reflete sobre as questões propostas e, por sentir que está "atrasada" em relação aos colegas, acaba por perguntar como estes resolveram as questões, antes mesmo de tentar a sua resolução.

Uma vez que, cada um dos alunos tem o seu ritmo de trabalho, o facto de estarem a trabalhar individualmente pode ser prejudicial para o sucesso da tarefa, na medida em que os alunos com maior facilidade são precipitadamente desmotivados e desconectados da tarefa a ser realizada, e os alunos com maior dificuldade podem deixar de tentar compreender as questões que lhes são colocadas.

Outro aspeto relevante que observei na forma de trabalhar do Grupo 2 foi a existência clara de um aluno que assumiu o papel de líder. Este aluno fez, por várias vezes, o ponto de situação relativamente às resoluções de cada um dos outros elementos do grupo e tomou sempre o papel de "explicador", quando surgia uma dúvida no trabalho.

Irei, de seguida, analisar as produções escritas resultantes destes dois grupos.

Como se pode observar pelas Figuras 5 e 6, as alunas, que integram o Grupo 1, apresentam resoluções bastante similares. Cada uma das resoluções é representativa, de facto, de um trabalho que foi produzido em grupo. Não existem estratégias de resolução distintas e a forma de explicitar a linha de raciocínio é similar.

O mesmo não acontece relativamente ao Grupo 2, como se pode observar nas Figuras 12 e 13.

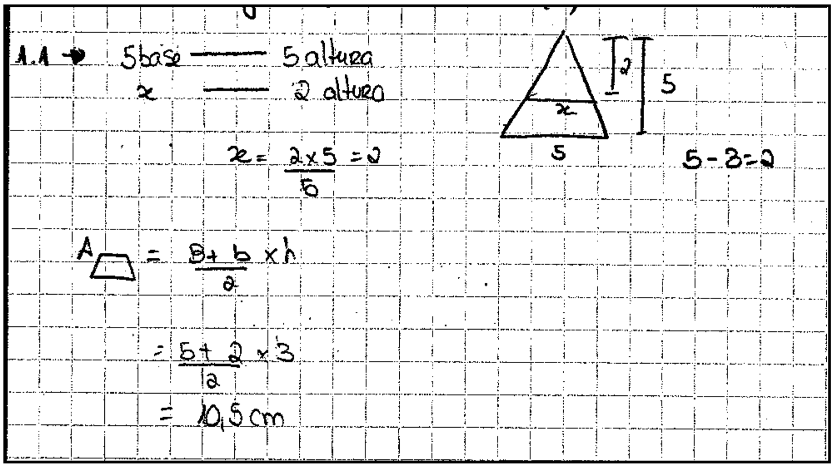


Figura 12 - Resolução da Inês, Ficha n.º 1 – exercício 1.1.

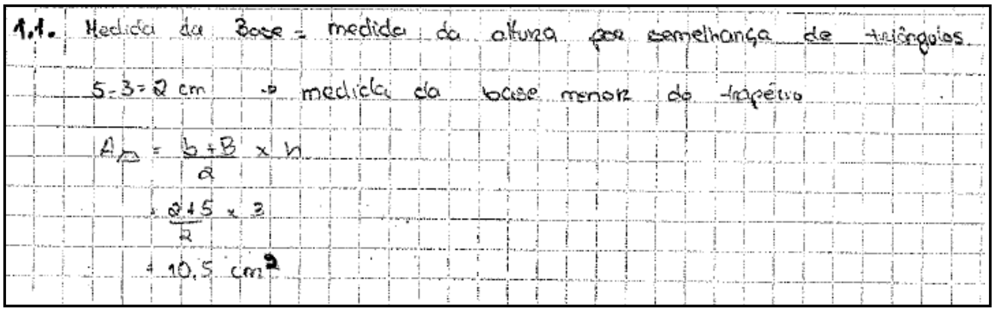


Figura 13 - Resolução do Luís, Ficha n.º 1 – exercício 1.1.

Embora a estratégia utilizada para a resolução do exercício seja idêntica, os três alunos apresentam produções escritas bastantes distintas. Na Figura 12, a aluna utiliza a *regra de três simples* para calcular o valor do comprimento do segmento de reta de extremos A e D. Não evidencia a semelhança de triângulos que lhe permite recorrer à proporcionalidade direta. Na Figura 13, o aluno explicita a ideia matemática base que utilizou na sua resolução – a semelhança de triângulos – justificando, assim, o cálculo efetuado.

Neste grupo, as justificações usadas na resolução dos exercícios revelam diferentes níveis da capacidade de comunicar por escrito.

Nas aulas que lecionei, fui acompanhando o trabalho desenvolvido por todos os grupos de alunos, pelo que me permitiu verificar que a forma de trabalhar destes dois grupos é representativa de toda a turma.

Para compreender de que forma os alunos produzem explicações escritas em situação de trabalho de grupo encontrei relevância, também, em comparar as resoluções individuais apresentadas por alunos de tarefas realizadas em grupo com as resoluções que apresentam em momento de trabalho autónomo individual.

Na 10.ª Minificha de Avaliação (Anexo XVI) – realizada após a minha intervenção letiva – existe uma questão que necessita de uma justificação semelhante ao tipo de justificações que os alunos exploraram nas tarefas que realizei em grupo, nas aulas que lecionei. Mostro o caso de quatro alunas que revelam explicações muito díspares em ambas as questões (Figuras 14, 15, 16 e 17):

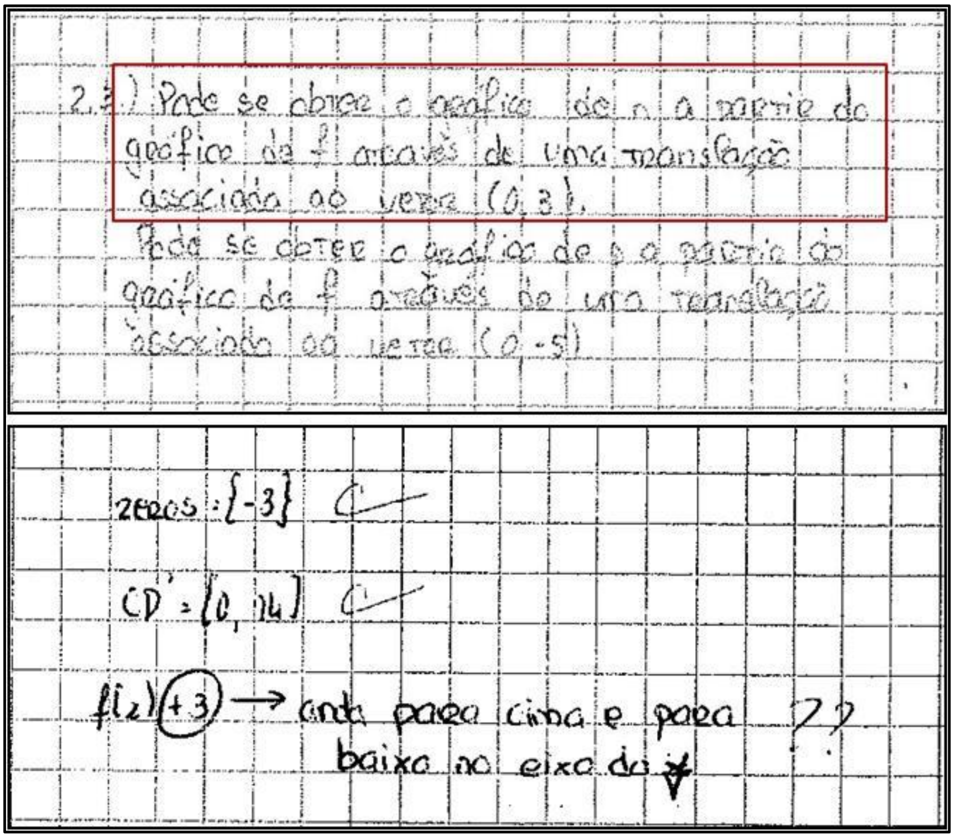


Figura 14 - Resolução da Maria, *Família de Funções Quadráticas I* – exercício 2.3. (acima), 10.ª Minificha – exercício 3.1. (abaixo)

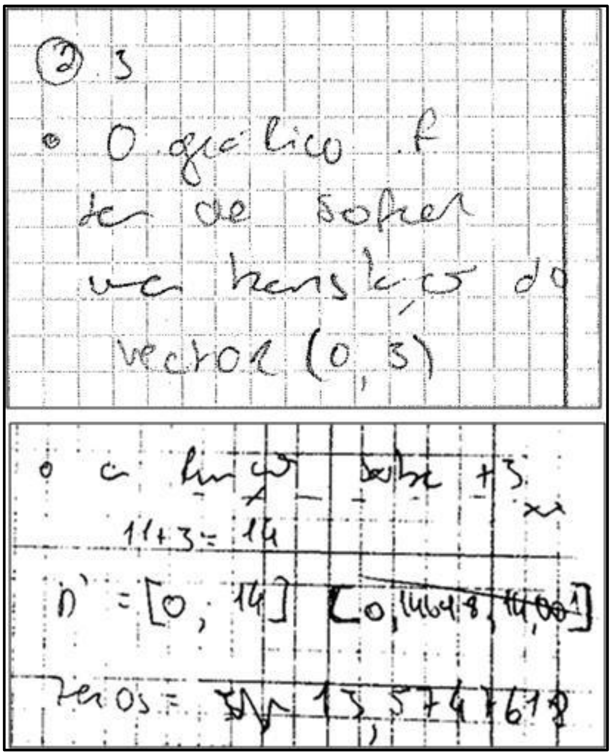


Figura 15 - Resolução da Sofia, Família de Funções Quadráticas I – exercício 2.3. (acima), 10.ª Minificha – exercício 3.1. (abaixo)

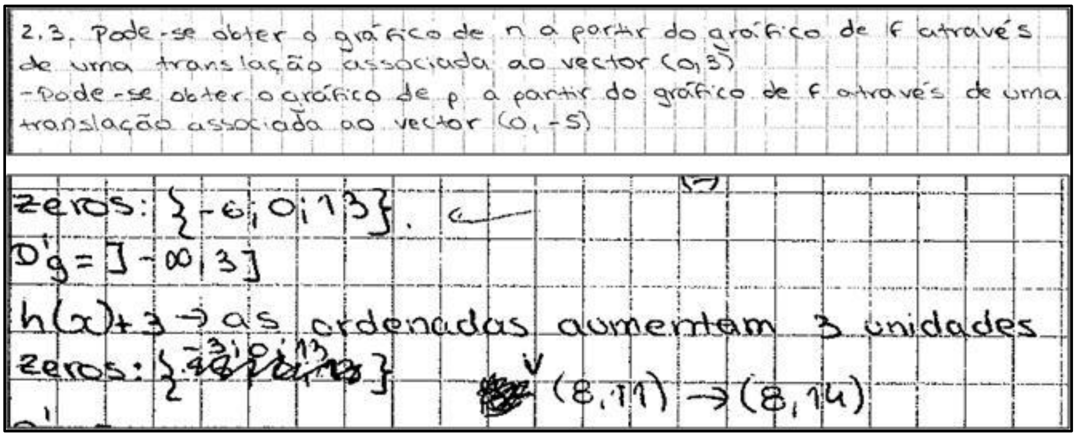


Figura 16 - Resolução da Lara, Família de Funções Quadráticas I – exercício 2.3. (acima), 10.ª Minificha – exercício 3.1. (abaixo)

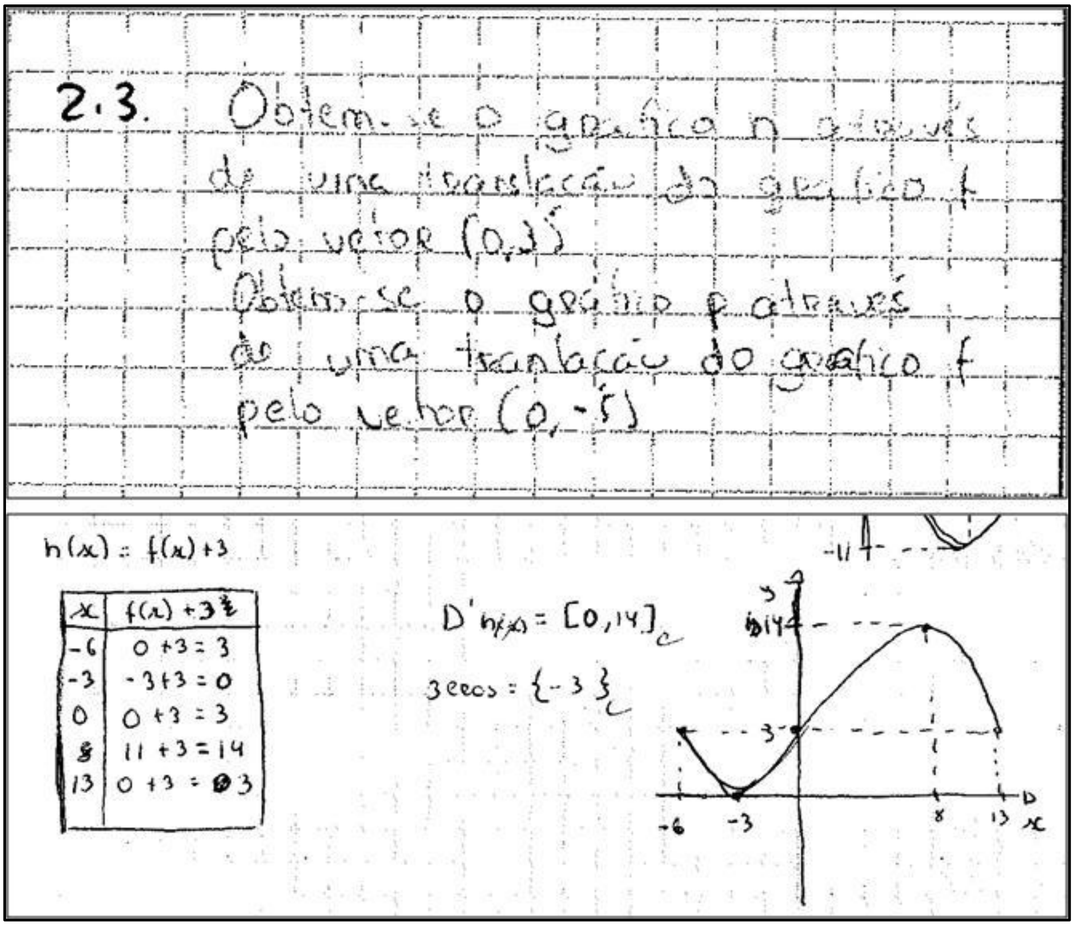


Figura 17 - Resolução da Sara, Família de Funções Quadráticas I – exercício 2.3. (acima), 10.ª Minificha – exercício 3.1. (abaixo)

Em todos estes casos, as alunas produziram explicações escritas completas e rigorosas a nível matemático, quando em contexto de trabalho de grupo. Analisando as produções escritas de todos os elementos dos diferentes grupos que estas quatro alunas integraram, verifiquei que estavam todas em concordância com as aqui apresentadas.

No entanto, quando lhes é exigido o mesmo tipo de justificação a nível individual, as situações divergem. Se, por um lado, a maioria dos alunos reproduz justificações similares às que são praticadas em grupo, por outro lado podemos observar que: nas Figuras 14 e 15, as explicações apresentadas são incompletas e um pouco descuidadas; nas Figuras 16 e 17, as explicações apresentadas são suficientes, no entanto, diferem dos processos habitualmente utilizados por estas alunas nas resoluções em aula, durante os momentos de trabalho de grupo.

Estas observações sugerem que as justificações, quando desenvolvidas em grupo, tendem a apresentar-se mais completas e cuidadas.

Abordagens Seguidas pelos Alunos

Neste tópico vou investigar, através das produções escritas dos alunos, se recorrem mais frequentemente à representação algébrica ou à representação gráfica nas suas resoluções. Vou também identificar quais as dificuldades dos alunos relacionadas com cada tipo de representação.

Na questão 1.4. da Ficha n.º 1 (Anexo VI) - a tarefa inicial - é pedido que os alunos esbocem o gráfico que relaciona as duas variáveis da problemática em estudo:

> 1.4. Designa por x o deslocamento de P e por **A** a área de [ABCD]. Esboça o gráfico que relaciona **A** com x.

Figura 18 - Enunciado do exercício 1.4. da Ficha n.º 1

Uma vez que, nas três alíneas anteriores, os alunos encontraram os valores das variáveis para três situações distintas, a sequência das questões apelava a que esta fosse resolvida com recurso às anteriores. Isto é, os alunos não precisam conhecer a função que relaciona as variáveis para prever o comportamento das mesmas através do esboço de um gráfico. O próprio contexto do problema permite aos alunos refletir sobre o comportamento destas variáveis sem recorrer à sua expressão algébrica. Ainda assim, fui surpreendida ao constatar que a grande maioria dos alunos sentiu necessidade de encontrar primeiro a expressão algébrica da função que relaciona as duas variáveis para depois, com recurso à calculadora gráfica, esboçar com maior rigor o gráfico da função.

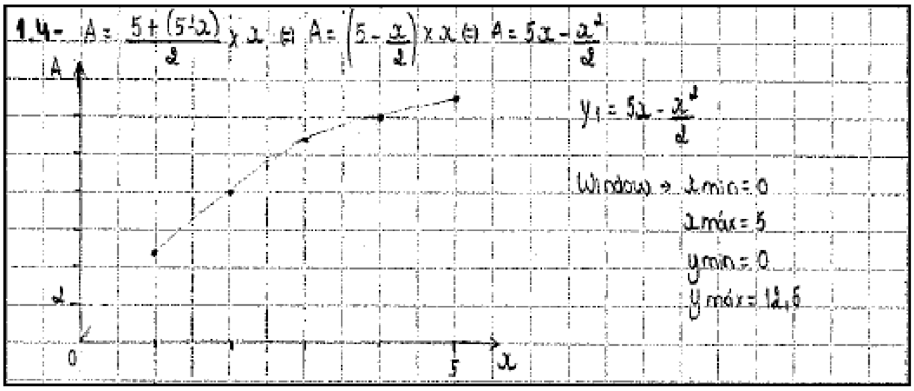


Figura 19 - Resolução da Francisca, Ficha n.º 1 – exercício 1.4.

Na figura 19, a aluna, além de recorrer à expressão algébrica, atentou ao domínio da função segundo o contexto do problema. Teve ainda o cuidado de esclarecer que recorreu à calculadora gráfica para observar qual o comportamento da função e a vista que definiu para a mesma.

Ocorreu, também, um episódio, que não posso deixar de salientar, bastante revelador das dificuldades que os alunos têm na representação do gráfico de funções, quando estas são consideradas no contexto de um problema:

> *Ana*: Vou pôr na calculadora! (…) Window… Fica giro, fica ao contrário!
> *Bárbara*: Olha para o meu, que desgraça!
> *Ana*: Não, tens que tirar os negativos! Uma área nunca pode ser negativa.
> *Bárbara*: Ah, pois não...
> *Francisca*: E o x nunca pode ser maior que 5.
> *Bárbara*: O x não pode ser maior que 5?!
> *Ana*: Então e o y é por volta dos 20?
> *Bárbara*: Não… a área não sei quanto pode ser, mas a altura só pode ser 5.
> *Ana*: A área nunca pode ser mais do que 5×5… 25.
> *Francisca*: 25? O máximo vai ser 12,5.
> *Bárbara*: Não! Mas se o P chegar até aqui não é um trapézio, é um triângulo!
> *Professora*: Exatamente, e qual vai ser a área?
> *Bárbara*: …12,5? Não?
> *Professora*: Disseste-me que quando o ponto P atinge o ponto E, fica um triângulo. É esse o polígono que vais considerar.
> *Bárbara*: Mas aí já não podemos contar, porque isso não é um trapézio, é um triângulo!
> *Professora*: É um triângulo, mas não te é pedida a área do trapézio.
> *Bárbara*: É sim, área de [ABCD]… é um trapézio.
> *Professora*: Mas na situação em que P atinge E, os pontos A e D vão coincidir, portanto, o polígono formado, é o triângulo.

[*registo em aula, 6 de março 2013*]

As alunas compreenderam que a função teria o domínio restringido pelo contexto da problemática em estudo e compreenderam, também, qual o valor máximo atingido pela variável. No entanto, tiveram dúvidas se esse valor pertenceria ao contradomínio da função.

Este episódio permitiu-me refletir sobre a forma como coloquei a questão no enunciado (Figura 18). De facto, aquando da minha planificação de aula, não previ que poderia surgir esta dúvida entre os alunos, o que me leva a pensar que existe uma fragilidade no enunciado que a provocou. Hoje, com o devido distanciamento e exercício de reflexão sobre a aula lecionada, sei que esta teria sido uma boa questão para levar a discussão em grande grupo.

Uma das maiores dificuldades que os alunos demonstram quando trabalham com representações algébricas é a atribuição de significado matemático (Figura 20). A questão 3.2. da 8.ª Minificha de Avaliação (Anexo XIII), pedia aos alunos que explicassem como se pode obter o gráfico de $g(x) = -(x+3)^2 + 2$ a partir do gráfico da função $f(x) = x^2$.

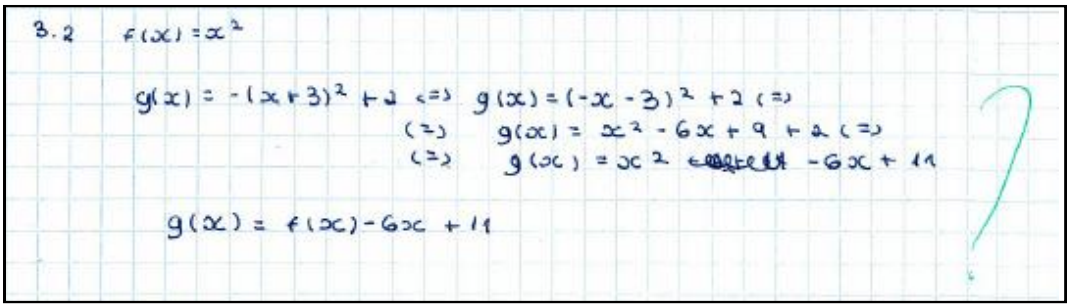


Figura 20 - Resolução da Leonor, Minificha n.º 8 – exercício 3.2.

A aluna revela não compreender o significado gráfico das expressões algébricas representadas (Figura 20). Recorre, assim, ao cálculo algébrico, sem lhe atribuir qualquer significado matemático.

Na Figura 21, a aluna opta também por explicar a transformação de funções através da representação algébrica. Fá-lo de forma correta, no entanto, a inexistência de uma justificação pode revelar que a aluna não relaciona a representação algébrica com a representação gráfica desta função.

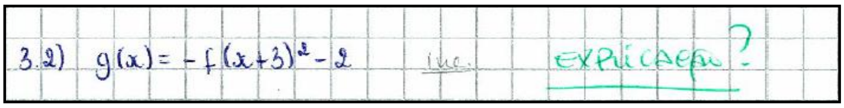
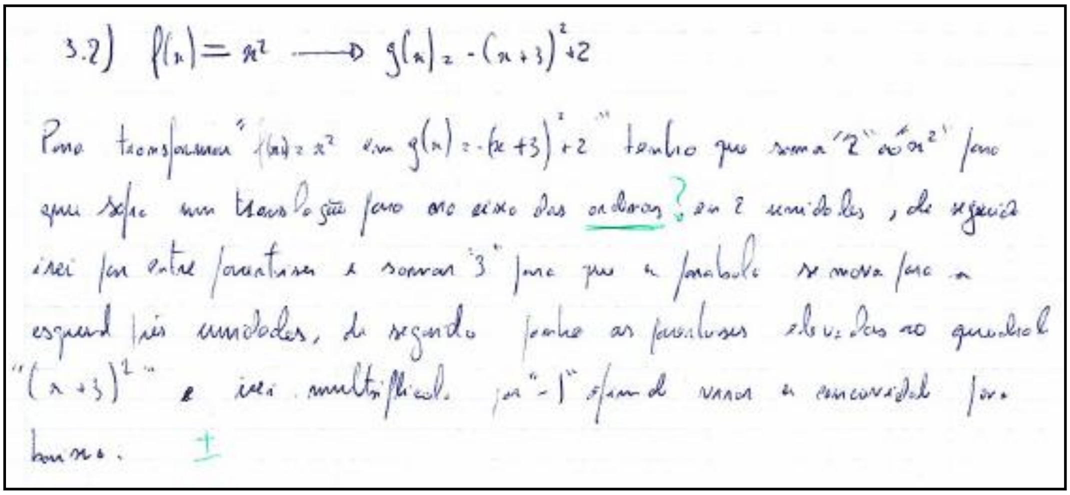


Figura 21 – Resolução da Francisca, Minificha n.º 8 – exercício 3.2.

Também na Figura 22, o aluno revela grande dificuldade em exprimir o significado da expressão algébrica da função g. O aluno aparenta ter alguma noção gráfica da transformação de funções, no entanto, o seu discurso - “tenho que somar 2 ao x^2 (…) de seguida, irei por parêntesis e somar 3” - revela alguma falhas na compreensão do seu significado matemático.



3.2) $f(x) = x^2 \longrightarrow g(x) = -(x+3)^2+2$

Para transformar "$f(x) = x^2$" em "$g(x) = -(x+3)^2+2$" tenho que somar "2" ao "x^2" para que seja uma translação para o eixo das ordenadas? em 2 unidades, de seguida irei por entre parêntesis e somar "3" para que a parábola se mova para a esquerda três unidades, de seguida ponho os parêntesis elevados ao quadrado "$(x+3)^2$" e irei multiplicá-lo por "-1" a fim de virar a concavidade para baixo.

Figura 22 – Resolução do Francisco, Minificha n.º 8 – exercício 3.2.

Em relação à representação gráfica, a maior dificuldade que observei ao longo da minha intervenção, e tantas outras aulas em que acompanhei a turma foi a definição do domínio de uma função quando esta está a ser considerada num determinado contexto problemático.

Luís: Vai ficar isto, o gráfico que é possível.
Inês: O quê? A minha não dá isso.
Luís: Sim, mas agora tens de ajustar. O x está compreendido entre 0 e 5.
(…)
Luís: E a altura máxima é 12,5.
Inês: Porquê 12,5?
Luís: Qual é o valor máximo que x pode tomar?

[*registo em aula, 6 de março de 2013*]

Em relação à representação algébrica, notei ao longo das aulas que ainda existem muitos alunos com falhas no cálculo algébrico que já deveriam ter sido colmatadas ao longo do 3.º ciclo. O episódio que relato de seguida é representativo de uma série de episódios que aconteceram diariamente nas aulas que acompanhei:

Inês: Como é que nós vamos agora desembaraçar denominadores nisto?
(…)
Professora: Primeiro, vamos ter que desembaraçar de parêntesis. Tens aqui alguma multiplicação ou alguma divisão?
Inês: Não, tenho só uma adição.
Professora: Exatamente, ent…
Inês: Então fica $10 - x$?

Professora: Exatamente. Depois tens o x que multiplica por todo o numerador e aí, sim, aplicas a propriedade distributiva.
Inês: Fica $x \times 10$ e $x \times (-x)$.
Professora: Exatamente.
Inês: Fica $10x$ e…
Beatriz: $-x^2$.
Inês: Ah!

[*registo em aula, 6 de Março de 2013*]

Este tipo de resolução que recorre à representação algébrica antes de fazer uma abordagem gráfica das questões em estudo, assim como as dificuldades associadas a estas representações, acima descritas, foram representativas do que observei nos alunos da turma de 10.º ano, ao longo do ano letivo.

Ainda no âmbito da unidade didática das funções, pude verificar, através da análise da resolução do primeiro teste de avaliação do 3.º período (ou seja, logo após a minha intervenção letiva) que, em problemas não direcionados para um tipo de abordagem específica – isto é, os alunos têm liberdade para optar entre uma resolução algébrica e uma resolução gráfica – apesar de existir um maior número de alunos que opta pela resolução algébrica, vários alunos optam, também, por abordar o problema recorrendo ao gráfico das funções e, consequentemente, à calculadora gráfica.

Apresento dois exemplos de resposta (Figuras 23 e 24) à questão 5 do 5.º teste de avaliação (Anexo XV). Em ambas as alíneas, o aluno poderia seguir uma abordagem algébrica ou gráfica, sendo que a primeira revelar-se-ia mais trabalhosa e demorada, devido aos cálculos necessários para a efetuar.

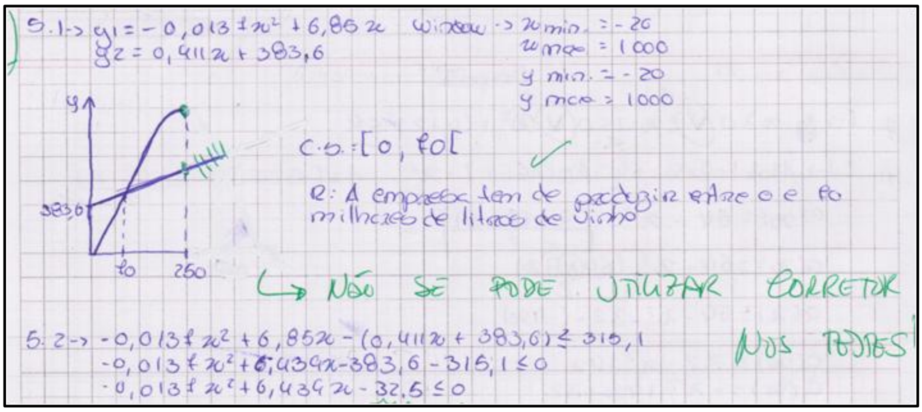


Figura 23 – Resolução da Ana, 5.º Teste de Avaliação – exercício 5

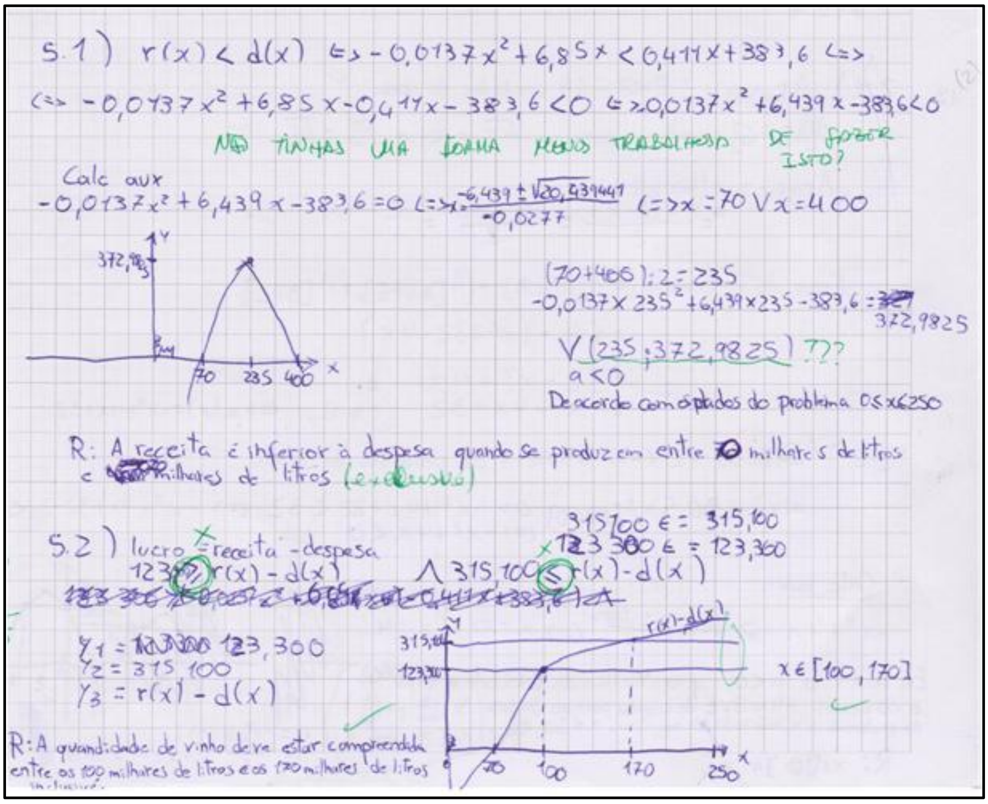


Figura 24 – Resolução da Alexandra, 5.º Teste de Avaliação – exercício 5

Na questão 5.1, enquanto que uma aluna recorreu à calculadora gráfica para observar o gráfico das funções (Figura 23), a outra aluna recorreu ao cálculo algébrico (Figura 24). Ambas fazem o inverso na questão 5.2. Sendo estas representativas das resoluções que analisei dos restantes alunos, posso inferir que os alunos não terão um método “preferido” para abordar este tipo de questões. Adaptam, sim, as representações aprendidas às questões que lhes são colocadas, podendo a expressão algébrica das funções trabalhadas influenciar na escolha da abordagem.

Apenas cinco alunos resolveram ambas as alíneas do exercício com a mesma abordagem e, em todos estes casos, optaram por trabalhar a representação algébrica das funções. Ao ter acompanhado estes alunos na correção dos testes, apercebi-me que, a escolha desta abordagem, embora admitam que é mais trabalhosa, lhes dá mais confiança na resolução do problema, o que sugere algum receio de fazerem uma má interpretação da análise dos gráficos das funções. Esta constitui outra das dificuldades dos alunos associada à representação gráfica.

CONCLUSÕES

Este trabalho investigativo incidiu sobre as cinco aulas que integraram a minha intervenção letiva, ainda assim, para a minha investigação considerei toda a observação que pude fazer ao longo de um ano letivo com os alunos da turma que acompanhei.

Propus-me, ao trabalhar com estes alunos, a investigar sobre dois temas desafiantes – comunicação matemática escrita e o trabalho de grupo – na tentativa de compreender como os alunos comunicam matematicamente, por escrito, quando trabalham em grupo. Desta forma, irei, finalmente, apresentar resposta às perguntas a que me propus, inicialmente, responder.

Qual o rigor da linguagem matemática que usam alunos do 10º. ano quando comunicam de forma escrita em trabalho de grupo? Usam terminologia matemática simbólica e vocabulário formal? Quais as principais dificuldades que apresentam?

Após a análise das produções escritas realizadas pelos grupos de alunos que trabalharam cooperativamente nas tarefas que fui propondo, atendendo ao rigor da linguagem matemática escrita usada nas resoluções destas tarefas, encontrei evidência de que os alunos são pouco rigorosos na sua comunicação escrita. Note-se que o estudo incidiu sobre alunos do 10.º ano de escolaridade e que esta competência da comunicação matemática escrita só vem a ser trabalhada desde o 7.º ano de escolaridade. Este período de três anos em que os alunos são levados a explorar a sua comunicação matemática mostra-se curto, pelo que concordo com o estudo de Ntenza (2006) que sugere que esta abordagem seja iniciada nos primeiros anos do ensino básico, com as devidas adaptações ao nível cognitivo dos alunos.

Pude também observar que alguns alunos evidenciam já ser capazes de usar uma linguagem cuidada, recorrendo ao uso da terminologia matemática simbólica e de vocabulário formal, tal como esperado ao nível do ensino secundário (NCTM, 2007). No entanto, o meu estudo evidencia que a maioria dos alunos ainda recorre ao uso de vocabulário informal nas suas produções escritas. Esta evidência é transversal ao trabalho realizado pelos alunos em grupo e individualmente.

Pude constatar que a utilização de terminologia matemática simbólica constitui uma das maiores dificuldades dos alunos que, ao tentarem apresentar produções escritas mais rigorosas, muitas vezes, não são assertivos na escolha da terminologia correta. Este facto é frequentemente verificável no tipo de tarefas que apelam à composição matemática, em que os alunos têm, ainda, muita dificuldade em determinar de que forma deverão elaborar este tipo de respostas.

De que forma produzem os alunos explicações escritas quando trabalham em grupo? Quais as principais dificuldades que apresentam?

Para conseguir resposta a esta questão, encontrei bastante utilidade no registo das gravações áudio da interação dos grupos aquando da resolução de uma tarefa. Pude observar que os alunos produzem dois tipos de explicações escritas, quando em contexto de trabalho de grupo, que se caracterizam da seguinte forma: (1) produções escritas representativas de um trabalho em conjunto e (2) produções escritas representativas de um trabalho individual. As primeiras caracterizam-se pela apresentação de explicações escritas mais completas e melhor fundamentadas; já as segundas caracterizam-se pela apresentação de explicações escritas menos completas e mais fracas a nível matemático.

Na origem destes dois tipos de produções escritas produzidas pelos alunos está a forma como foi desenvolvido o trabalho em grupo. Por um lado, pude constatar que os grupos, cuja abordagem ao trabalho em grupo foi mais cooperativa, apresentam produções escritas similares e representativas de um trabalho realizado por um grupo de pessoas. Por outro lado, observei que os grupos de alunos que trabalharam de forma mais individualista apresentam produções escritas bastante díspares, ao nível das explicações que apresentam, o que não as torna representativas de um trabalho realizado em grupo. Nestas, não há evidência da concretização de aprendizagens por parte de todos os elementos do grupo, já que há discrepância no nível de justificações que apresentam.

Os grupos que trabalharam as tarefas de forma mais cooperativa discutiram as suas interpretações, partilharam dificuldades e definiram estratégias de resolução. Este feedback entre os alunos do mesmo grupo contribuiu para que as suas produções escritas fossem mais completas ao nível das justificações apresentadas. Esta relação entre o feedback e uma comunicação escrita mais rica, em contexto de trabalho de grupo, é sugerida por Santos & Semana (2015).

No meu estudo, não há evidências que me permitam inferir sobre quais as dificuldades associadas à forma como os alunos produzem explicações escritas, em contexto de trabalho de grupo. No entanto, dou nota de que, quando os alunos trabalham em grupo, mesmo havendo partilha de ideias e estratégias, alguns alunos mostram dificuldade em reproduzir por escrito uma ideia que não foi originalmente sua.

Que tipo de representações – algébrica ou gráfica – são mais frequentemente trabalhadas pelos alunos? Quais as principais dificuldades associadas à abordagem algébrica e à abordagem gráfica?

Após a análise das várias produções escritas dos alunos, pude observar que, não existe uma tendência por parte dos alunos em optarem por uma das duas representações.

Associada à abordagem gráfica, está a dificuldade que muitos alunos revelam em identificar o domínio e contradomínio de uma função, tendo em conta o contexto de um problema. Ao recorrerem à calculadora gráfica, quando trabalham uma função, os alunos tendem a não compreender a relação entre o gráfico projetado pela calculadora gráfica e o gráfico que representa a função num determinado contexto, o que pode levar a interpretações erróneas. Esta evidência vai ao encontro das dificuldades apontadas por Friedland & Tabach (2001).

No que respeita à abordagem algébrica, as dificuldades apresentadas são ao nível do próprio cálculo algébrico. Este continua a suscitar dúvidas num grande número de alunos, o que já não deveria acontecer com tanta frequência numa turma do 10.º ano de escolaridade. A existência deste tipo de dificuldades impede o aluno de se focar no objetivo principal da tarefa, que consiste na compreensão dos significados matemáticos presentes na mesma. A atribuição de significado matemático às expressões algébrica foi outra das dificuldades encontradas.

REFLEXÃO

Este foi um estudo que teve por base de investigação a experiência, ao longo de um ano letivo, com 30 alunos de uma turma do 10.º ano de escolaridade. Neste sentido, as conclusões a que cheguei são apoiadas nas características destes alunos, pelo que a forma como os alunos comunicam matematicamente, por escrito, quando trabalham em grupo pode revelar-se diferente quando analisada em contextos distintos, tais como, diferentes anos de escolaridade ou comunidades escolares distintas.

Este estudo permitiu que estruturasse as aulas lecionadas para que as tarefas propostas fossem desenvolvidas no contexto de trabalho de grupo. Além de ir ao encontro das questões a que me propus responder, este facto deu-me oportunidade de conhecer melhor a forma como os alunos interagem quando trabalham em grupo, assim como, as diferentes posturas que adotam neste contexto. Considero que este tipo de observação é bastante importante para qualquer professor uma vez que a análise destes momentos proporcionou-me um conhecimento mais aprofundado sobre as aprendizagens dos alunos, nas aulas que lecionei, e sobre a forma como explicitam a sua linha de raciocínio, num ambiente mais descontraído, sem a intervenção direta do professor. Creio assim que a relação da forma como os alunos interagem no contexto de trabalho de grupo com a qualidade das produções escritas que realizam, possa ser um bom objeto de investigação para estudos futuros.

O rigor e empenho demonstrados nas produções escritas resultantes de tarefas em grupo advêm das interações entre os alunos, da troca de ideias e da discussão de estratégias de resolução. Desta forma, os alunos conseguem encarar uma tarefa de acordo com várias perspetivas, o que lhes promove um conhecimento mais profundo sobre os conceitos matemáticos trabalhados e desenvolve, também, o raciocínio matemático. Neste sentido, acredito que as tarefas em contexto de trabalho de grupo devem ser, tanto quanto possível, estendidas a todas as unidades didáticas.

Um outro aspeto que considero importante destacar é o facto do trabalho de grupo se mostrar favorável à concretização de aprendizagens dos alunos com fraco aproveitamento na disciplina de matemática que apresentam uma postura pouco confiante e participativa em aula. Ao terem previamente discutido estratégias de resolução com os colegas, esta metodologia de trabalho permite que estes alunos tomem um papel mais ativo no decorrer da aula. Estes alunos encaram as produções escritas como sendo do grupo, pelo que, se apresentarem falhas de raciocínio, não se sentem totalmente responsabilizados pela sua elaboração, sentindo-se menos inibidos a partilharem as suas ideias perante a turma. Desafiar os alunos a pensar sobre Matemática e a comunicar as suas ideias, faz com que os alunos se sintam mais convincentes e seguros dos seus argumentos (NCTM, 2007).

Não pude deixar de refletir sobre o trabalho de grupo, sem destacar a importância que a formação dos grupos tem, não só para a realização de explicações escritas mais completas e rigorosas, como também, na concretização das aprendizagens dos alunos. Concordo, após ter observado vários momentos de trabalho em grupo ao longo do ano letivo, que os grupos devem primar pela heterogeneidade no que respeita aos níveis de aproveitamento escolar. (Davidson, 1990; Crabill, 1990, citados por Abrantes, 1994). A forma como os alunos trabalham e interagem uns com os outros pode ser determinante nas repercussões que o trabalho de grupo pode ter – tanto pode causar constrangimentos para alguns alunos, como pode potenciar a concretização das suas aprendizagens. Neste sentido, acredito que, em certos casos o professor deva intervir na formação dos grupos, de forma a garantir um ambiente de trabalho propício à aprendizagem.

Um dos maiores obstáculos, que pude observar, associado a esta metodologia de trabalho, é o facto de os alunos com maior capacidade de compreensão matemática se poderem desmotivar e os alunos com uma capacidade de compreensão matemática mais débil poderem adotar uma postura mais passiva. De acordo com a forma como os alunos interagem, se um aluno com um bom aproveitamento matemático está constantemente à espera que os colegas de grupo o acompanhem nas diferentes resoluções, facilmente se desinteressa pela tarefa. Se um aluno, com fraco aproveitamento matemático, não consegue acompanhar o ritmo de trabalho dos colegas, rapidamente adota uma postura de observador, passando a registar no papel as estratégias escolhidas pelos colegas, sem refletir sobre as mesmas.

Ao longo dos dois anos de Mestrado tive o privilégio de conhecer vários alunos em contextos escolares diversos, assim como, conhecer vários docentes que partilharam comigo algumas das suas experiências e aprendizagens. No entanto, tendo sido esta a primeira oportunidade de acompanhar uma turma durante todo um ano letivo, assim como, trabalhar diretamente com uma professora – que considero um modelo do tipo de profissional que pretendo vir a ser – considero que esta foi a experiência mais enriquecedora que tive a nível profissional.

Passei por momentos menos confortáveis, com que me deparei com todas as minhas fragilidades enquanto docente e, também, festejei pequenas realizações pessoais, ao longo de toda esta experiência. De todos os momentos, ficaram os ensinamentos e as boas recordações. Sei que irei, ao longo da minha carreira, cruzar-me com um vasto tipo de professores e alunos, mas guardarei sempre o carinho com que todos os professores da ESPJAL me receberam, assim como todo o respeito, simpatia e compreensão que os alunos da turma que acompanhei demonstraram.

Espero que este estudo ajude outros professores a reconhecer a importância de investir em tarefas que promovam a elaboração de composições matemáticas, com o objetivo final de contribuir para a evolução da capacidade de comunicar matemática. Espero, também, que inspire outros docentes a investigar mais sobre a metodologia do trabalho em grupo, uma vez que, aquando de uma boa gestão, pode trazer bastantes benefícios para a concretização das aprendizagens dos alunos.

Mais do que um desafio, este estudo constituiu, para mim, uma grande oportunidade de aprendizagem, por tudo o que pude observar e por tudo o que me levei a experimentar, tendo saído, por inúmeras vezes da minha zona de conforto, enquanto professora.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O Trabalho de Projeto e a Relação dos alunos com a Matemática: a experiência do Projeto MAT789* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa) Lisboa: APM.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Francisco, J. M. (2012). Learning in collaborative settings: students building on each others ideias to promote their mathematical understanding.. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 417-438.

Freitas, L.V.; Freitas, C.V. (2002) *Aprendizagem cooperativa*. Porto: Edições ASA.

Friendland, A., & Tabach, M., (2001). Promoting multiple representation in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática A do 10.º ano do Ensino Secundário*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

NCTM. (2007). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* (versão portuguesa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ntenza, S. P. (2006) Investigating Forms of Children's Writing In Grade 7 Mathematics Classrooms. *Educational Studies in Mathematics* 61, 321–345

Nunes, F. (1997). Uma aula na vida do 5.º N. *Educação e Matemática*, *42*, 37-39.

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, G. & Abrantes, P. (1997) *Didática da Matemática: Ensino Secundário* (Brochura). Lisboa: Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009) *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC

Ponte, J. P., Nunes, C. C., & Quaresma, M. (2008). *Explorar, investigar, interagir na aula de Matemática: Elementos fundamentais para a aprendizagem*. (pp. 8 – 10) In A. C. Silva, M. Carvalho & R. G. Rêgo (Eds.), Ensinar Matemática: Formação, investigação e práticas docentes (pp. 49-74). Cuiabá: UFMT.

Santos, L. (2009). A avaliação das aprendizagens no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática, 105,* 87-90.

Santos, L. & Semana, S. (2015, Janeiro) Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics,* 88, 65-84

Shield, M. & Galbraith, P. (1998) The Analysis of Student Expository Writing In Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 36, 29–52

ANEXOS

ANEXO I – Plano de Aula n.º 1 – 6 de Março de 2013

Escola Secundária Professor José Augusto Lucas
2012/2013

PLANO DE AULA
Prof. Ana Filipa Matias
6 de Março de 2013

MATEMÁTICA	Secundário - 10.ºC	Lições n.º 121 e 122

TÓPICO: Funções e Gráficos **SUBTÓPICOS:** Função Quadrática

SUMÁRIO:
Estudo da Função Quadrática. Resolução de Problemas em trabalho de grupo.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Identificar a parábola como gráfico da função quadrática; → Estudar algumas propriedades do gráfico da função quadrática e entender o seu significado no contexto dos problemas; → Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Noção de função; → Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos; → Equações de 2.º grau; → Área de polígonos.	→ Resolução de Problemas; → Comunicação Matemática.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco.

METODOLOGIA DA AULA
Desenvolvimento de trabalho em pequenos grupos (3 a 4 elementos) - Fichas de trabalho. Sistematização, em turma, da resolução dos problemas realizados, com recurso ao *sketchpad*.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (*"Deslizando sobre o triângulo")*	45 minutos
→ (3) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (*"Áreas e Perímetros de retângulos")*	20 minutos
→ (4) Sistematização dos tópicos trabalhados.	15 minutos
→ (5) Marcação do TPC.	5 minutos

<table>
<tr><th>DESENVOLVIMENTO DA AULA</th><th>TEMPO PREVISTO</th></tr>
<tr><td>(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.</td><td>5 minutos</td></tr>
<tr><td>
(2) Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho "Deslizando sobre o triângulo"

<u>Nota</u>: O professor deve pedir aos alunos que formem os grupos de trabalho habituais.
Algumas alterações:
- O Miguel deverá integrar o grupo do Guilherme, Mário e Francisco Pontes;
- O Gonçalo deverá integrar o grupo do João, Pedro e Daniel;
- A Mafalda deverá integrar o grupo do Afonso, Alexandra e Ana Madalena.

O professor deve circular pelos grupos e:
- Fazer um levantamento de questões que possam surgir e que devam ser discutidas em grande grupo;
- Esclarecer dúvidas pontuais, orientando os alunos para atingirem o objetivo da tarefa;
- Acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, fazendo questões orientadoras de forma a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades, tendo em conta (1) as estratégias utilizadas; (2) o ritmo de trabalho dos diferentes grupos;

(2.1) Resolução do exercício 1.1.

<u>Dificuldades</u>: Alguns alunos poderão ter dificuldade em calcular a distância entre os pontos A e D.

Os alunos deverão identificar a semelhança entre os triângulos [BCE] e [ADE] e traduzi-la na razão entre comprimentos: que polígonos estão representados na figura? De que forma poderei calcular a área do trapézio? Haverá relação entre a o comprimento de [AD] e alguma outra medida?

<u>Possíveis estratégias de resolução</u>:

(E1) Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula: $\frac{(B+b)}{2}h$

(E2) Cálculo da área do trapézio como diferença da área de dois
</td><td>45 minutos</td></tr>
</table>

triângulos: [EBC] e [EAD]

(2.2) Resolução do exercício 1.2.

Após a resolução de **1.1**, os alunos não deverão ter dificuldades em fazer o exercício **1.2.**
Os alunos deverão perceber que a razão entre a base e a altura dos triângulos é de 1.
Deverão ser alertados para a justificação dos cálculos que utilizam.

(2.3) Resolução do exercício 1.3.

Dificuldades: Alguns alunos poderão sentir alguma dificuldade em fazer o raciocínio inverso ao das alíneas anteriores. Deve-se apelar ao seu método de resolução da área do trapézio e reforçar os dados que têm agora e os dados que querem descobrir.

Os alunos podem recorrer à calculadora gráfica para resolver a equação d 2.º grau.
Os alunos devem compreender que apenas uma das soluções da equação é resposta ao problema. Poderá aqui ser questionado o domínio da área do trapézio em função do deslocamento x, sem antes ter sido escrita a sua expressão.

(2.4) Resolução do exercício 1.4.

Dificuldades: Alguns alunos poderão ter a tendência de desenhar um gráfico linear.
Neste caso, os deverão ser alertados para as três alíneas anteriores que relacionam a área to trapézio [ABCD] com o deslocamento x. Deverão compreender que estes valores representam pontos do gráfico, e devem ser utilizados para fazer o esboço. Deverão também ser alertados para outros pontos notáveis da função.
O que acontece à área do trapézio, quando P coincide com M? E quando P coincide com E?

(2.5) Resolução do exercício 1.5.

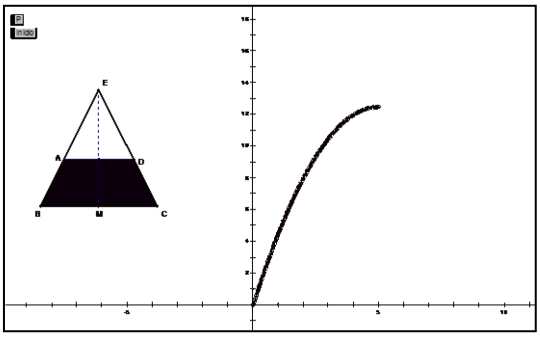
Dificuldades:

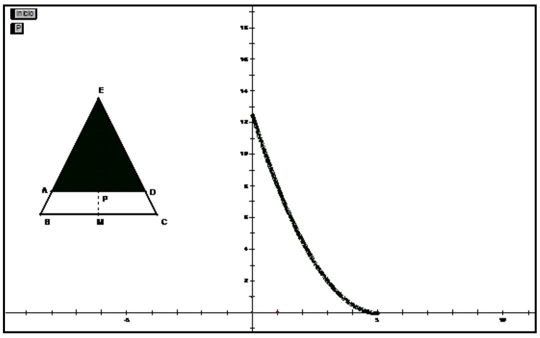
(1) Os alunos que tiverem dificuldade em resolver a alínea deverão ser confrontados com o método que utilizaram para o cálculo da área do trapézio nas alíneas anteriores.
- Deve pedir-se que escrevam a área do trapézio, representando as distâncias necessários através dos pontos assinalados;
- Devem escrever, então, as distâncias desconhecidas em função do deslocamento x.

(2) Após fazerem o esboço do gráfico (1.4), à partida já não haverá dificuldades em identificar o domínio e contradomínio da função. No entanto, caso ainda haja dificuldades neste sentido, poderão ser colocadas a questões:
Onde se pode deslocar o ponto P? Quais serão os valores que x poderá tomar?
Que valores toma a área do trapézio, quando P coincide com M? E

quando P coincide com E? **(2.6) Resolução do exercício 2** Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função. **<u>Dificuldades</u>**: À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja duvidas, serão dadas instruções nesse sentido. Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos. **(2.7) Resolução do exercício 3.** <u>Possíveis estratégias de resolução</u>: **(E1)** *Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula:* $\frac{b\times h}{2}$ Os alunos deverão seguir o raciocínio do exercício 1, utilizando a razão entre a base e a altura dos triângulos. Assim rapidamente concluirão que $\overline{AD} = \overline{PE} = 5 - x$. **(E2)** *Cálculo da área do triângulo [EAD] como diferença entre a área do triângulo [EBC] e do trapézio [ABCD].* Os alunos que optarem por esta resolução, terão apenas que calcular a área do triângulo [EBC], uma vez que a área do trapézio já foi calculada (e é enunciada na ficha) **(2.8) Resolução do exercício 4.** Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função vs. domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função. **<u>Dificuldades</u>**: À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja duvidas, serão dadas instruções nesse sentido. Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos. **(3) Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho "*Áreas e Perímetros de retângulos*"** **<u>Nota</u>:** A ficha de trabalho será dada a cada grupo à medida que vão terminando a ficha de trabalho anterior. Caso haja alunos que não cheguem a realizá-la na aula, levarão a ficha para TPC.	 **20 minutos**

(3.1) Resolução do Exercício 1. Os alunos não deverão ter dificuldades em desenhar os retângulos, mas haverá uma tendência para desenharem retângulos cujos lados têm como medida números inteiros. Deve-lhes ser pedido que desenhem, pelo menos, 4 retângulos. Para o cálculo das áreas dos retângulos, também não devem surgir dúvidas. **(3.2) Resolução do Exercício 1.1.** Os alunos deverão começar por encontrar a outra medida do lado do retângulo, para, então, calcular a sua área. Não deverão surgir dificuldades na realização deste exercício. **(3.3) Resolução do Exercício 1.2.** **Dificuldades**: Alguns alunos poderão escrever uma equação com duas variáveis que representam ambos os lados do retângulo. Caso não consigam resolver o problema, deve-lhes ser pedido para relacionar uma variável com a outra. A representação do retângulo poderá ajudar. ***Se um dos lados do retângulo for x, quanto medirá o outro?*** **(3.4) Resolução do Exercício 2.** Após a resolução do exercício anterior, os alunos já deverão conseguir expressar um lado do retângulo em função do outro. Os alunos deverão, então, recorrer à calculadora para esboçar o gráfico e calcular o seu máximo. Deverão, também, fazer a interpretação geométrica do gráfico obtido. ***Que tipo de gráfico obtemos? Que retângulo obtemos quando a sua área é máxima?*** **Dificuldades**: Poderão surgir algumas dúvidas relativamente ao domínio da função. Os alunos podem considerar um de dois casos: $x \in]0, 10[$ ou $x \in]0, 5]$. Os alunos que considerarem o primeiro caso, devem ser levados a questionar-se sobre as dimensões dos retângulos, a simetria da função e o seu significado geométrico. Quanto aos que considerarem o segundo caso, devem recordar que a área é escrita em função de um dos lados, logo, o lado pode tomar qualquer valor entre 0 e 10. Os alunos voltarão a ser confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.	
(4) Sistematização dos tópicos trabalhados. **Nota:** A sistematização será feita apenas se todos os alunos terminarem na aula, ambas as tarefas propostas. Através do programa *sketchpad*, os alunos vão poder observar o gráfico que traduz a área do trapézio e do triângulo, em função do deslocamento de P. Poderão comparar o gráfico com o esboço que fizeram e confirmar se a expressões que encontraram traduzem as relações entre a área dos polígonos e o deslocamento x.	**15 minutos**



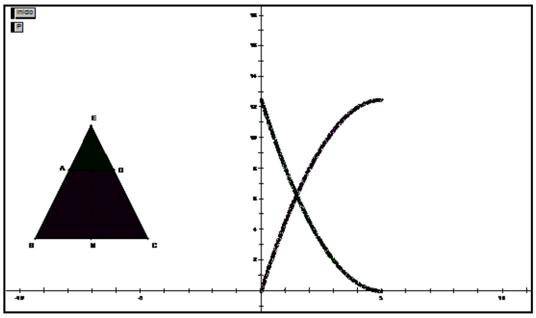


Também se observarão os dois gráficos em simultâneo, de forma a interpretar geometricamente a situação:

- quando o ponto P coincide com M, que valores tomam as áreas dos polígonos?

- e quando coincide com E?

- quando é que os polígonos têm áreas iguais?



Aquando da discussão, os alunos deverão também ser questionados quanto:
- ao domínio e contradomínio da função e domínio e contradomínio no contexto do problema;
- às semelhanças/diferenças entre as características dos gráficos das funções (extremos, monotonia, simetria).

(5) Registar, no quadro, o trabalho para casa. — **5 minutos**

Resolver o exercício 32 da página 42 e propostas 11, 12 e 13 da página 110.

DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS
Apesar das tarefas da aula serem realizadas em grupo, serão recolhidas as resoluções de todos os alunos, o que permitirá avaliar se cada grupo é coerente no trabalho apresentado, se foram escolhidas diferentes estratégias de resolução por parte dos grupos de alunos, de que forma os alunos fazem o registo deste tipo de tarefas investigativas e de que forma apresentam os seus registos relativos a exercícios que exijam o recurso à máquina calculadora gráfica.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Sendo esta uma turma bastante heterogénea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos. Como se pretende recolher todas as fichas relativas à primeira ficha de trabalho ("*Deslizando sobre o triângulo*"), a discussão da tarefa não será feita de seguida, sendo dada uma segunda ficha de trabalho àqueles que terminarem. Apenas se iniciará a discussão da tarefa em grande grupo, caso a maioria dos alunos termine a segunda ficha de trabalho. Caso contrário será feita na aula seguinte. Ainda assim, caso algum grupo termine ambas as tarefas mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa. Caso **a planificação prevista não seja cumprida**, a segunda tarefa proposta para a aula será proposta para trabalho para casa.

ANEXO II – Plano de Aula n.º 2 – 7 de Março de 2013

Escola Secundária Professor José Augusto Lucas 2012/2013	PLANO DE AULA Prof. Ana Filipa Matias 7 de Março de 2013

MATEMÁTICA	Secundário - 10.ºC	Lições n.º 123 e 124

TÓPICO: Funções e Gráficos **SUBTÓPICOS:** Função Quadrática

SUMÁRIO:

Família de funções quadráticas. Resolução de Problemas em trabalho de grupo.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Estudar algumas propriedades do gráfico da função quadrática e entender o seu significado no contexto dos problemas; → Estudar a influências dos parâmetros a, h e k em funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$; → Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Noção de função; → Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos.	→ Raciocínio Matemático; → Comunicação Matemática.

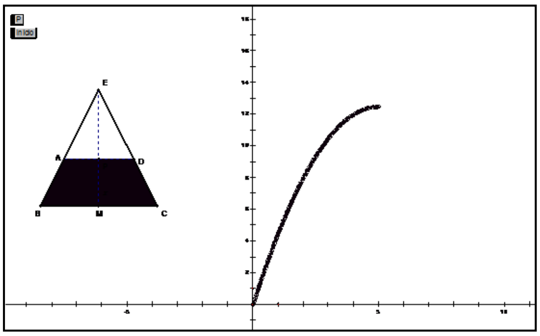
RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco.

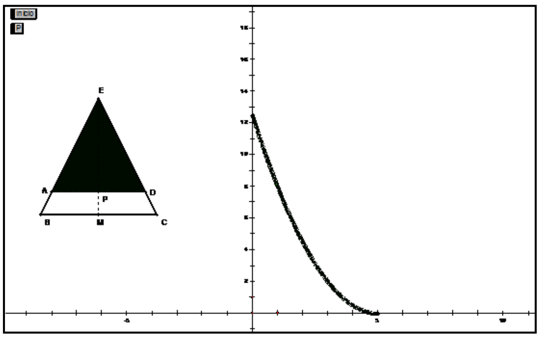
METODOLOGIA DA AULA
Desenvolvimento de trabalho em pequenos grupos (3 a 4 elementos) - Fichas de trabalho. Discussão em grande grupo com sistematização da resolução dos problemas realizados, com recurso ao *sketchpad*.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Discussão e Sistematização dos da tarefa realizada na aula anterior (*“Deslizando sobre o triângulo”)*	20 minutos
→ (3) Resolução, em pequenos grupos, de uma ficha de trabalho (*“Família de Funções Quadráticas I”)*	35 minutos
→ (4) Discussão e Sistematização da tarefa (*“Família de Funções Quadráticas I”)*	10 minutos
→ (5) Início da resolução, a pares, de uma ficha de trabalho (*“Família de Funções Quadráticas II”)*	15 minutos
→ (6) Início Marcação do TPC.	5 minutos

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO
(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.	**5 minutos**
(2) Discussão e Sistematização dos tópicos trabalhados. Para a discussão da tarefa poderão ser colocadas as seguintes questões: Expressar a área do trapézio em função do deslocamento de P: ***- De que forma posso calcular a área do trapézio?*** ***- Qual a relação entre os polígonos representados na figura?*** ***- Como posso escrever $\overline{AD}$ em função do deslocamento de P?*** Esboço do gráfico da Área do trapézio: ***- Como varia a área do trapézio quando P se afasta de M?*** ***- Como vai ser a monotonia do gráfico da função?*** ***- Qual o domínio da função da área do trapézio? Consideramos os casos em que $x = 0$ ou $x = 5$? Porquê?*** **Nota:** Poderão surgir algumas dúvidas sobre o crescimento do gráfico: **porque não é linear? Porque é que a curva não é ao contrário?** Expressar a área do triângulo em função do deslocamento de P: ***- De que forma posso calcular a área do triângulo?*** **Nota:** Vamos usar novamente a semelhança entre os triângulos. Esboço do gráfico da Área do triângulo: ***- Como varia a área do triângulo quando P se afasta de M?*** ***- Como vai ser a monotonia do gráfico da função?*** ***- Qual o domínio da função da área do triângulo? Neste caso, consideramos os casos em que $x = 0$ ou $x = 5$? Porquê?*** Através do programa *sketchpad*, os alunos vão poder observar o gráfico que traduz a área do trapézio e do triângulo, em função do deslocamento de P. Poderão comparar o gráfico com o esboço que fizeram e confirmar se a expressões que encontraram traduzem as relações entre a área dos polígonos e o deslocamento	**20 minutos**

x.



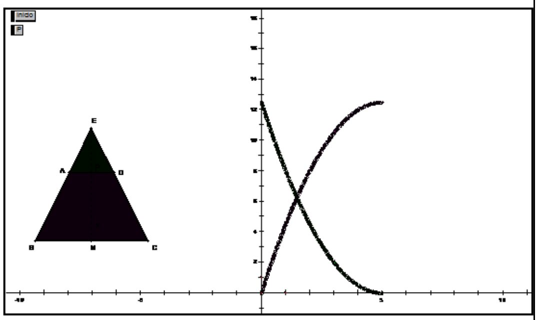


Também se observarão os dois gráficos em simultâneo, de forma a interpretar geometricamente a situação:

- quando o ponto P coincide com M, que valores tomam as áreas dos polígonos?

- e quando coincide com E?

- quando é que os polígonos têm áreas iguais?



Aquando da discussão, os alunos deverão também ser questionados quando:
- ao domínio e contradomínio da função e domínio e contradomínio no contexto do problema;
- às semelhanças/diferenças entre as características dos gráficos das funções (extremos, monotonia, simetria).

(3) Resolução da ficha de trabalho "Família de Funções Quadráticas I"

35 minutos

<u>**Nota**</u>**:** Os alunos deverão ser avisados que têm 30 minutos para realizar o trabalho proposto.
Quando a maioria dos grupos tiver terminado, os resultados serão sintetizados em grande grupo.

(3.1) Resolução do exercício 1

Com o conjunto de alíneas pretende-se que os alunos percebam a influência do parâmetro a nas funções do tipo $y = ax^2$.

<u>**Dificuldades**</u>:
- Alguns alunos poderão ainda ter dificuldades na escrita da expressão analítica das funções: **- O que representa $f(x)$? Qual a operação efetuada em $af(x)$?**
- Poder-se-á gerar alguma confusão na questão 1.4, em que se pede para agrupar as funções de acordo com características que tenham em comum. Em caso de dúvida, deve pedir-se aos alunos que tenham em conta as características que analisaram na alínea anterior, ou outro aspeto do gráfico que lhes pareça relevante.

(3.2) Resolução do exercício 2

Com conjunto de alíneas pretende-se que os alunos percebam a influência do parâmetro a nas funções do tipo $y = x^2 + k$.

<u>**Dificuldades**</u>:
- Alguns alunos poderão ainda ter dificuldades na escrita da expressão analítica das funções: **- O que representa $f(x)$? Qual a operação efetuada em $f(x) + k$?**
- Poder-se-á gerar alguma confusão na questão 2.5, em que se pergunta o que as três funções têm em comum. Em caso de dúvida, deve pedir-se aos alunos que tenham em conta as características que analisaram na alínea anterior, ou outro aspeto do gráfico que lhes pareça relevante.

(3.3) Resolução do exercício 3

Com conjunto de alíneas pretende-se que os alunos percebam a influência do parâmetro a nas funções do tipo $y = (x — h)^2$.

<u>**Dificuldades**</u>:
- Alguns alunos poderão ainda ter dificuldades na escrita da expressão analítica das funções. Nestes casos, pode-se sugerir que calculem $f(x)$para diferentes valores de x. - **Como calculamos $f(3)$? E $f(\sqrt{12})$? E $f(a)$?**

<u>**Nota**</u>**:** As questões não mencionadas não deverão suscitar dúvidas, uma vez que serão resolvidas com recurso à máquina calculadora gráfica. Questões relacionadas com o uso da calculadora gráfica serão esclarecidas individualmente, devido aos diferentes modelos utilizados pelos alunos.

(4) Discussão e Sistematização dos da tarefa “*Família de Funções Quadráticas I*”

15 minutos

Após trabalharem estes três exercícios, será feita uma sistematização das aprendizagens com a ajuda dos alunos.
- O que podem dizer sobre as funções do tipo $y = ax^2$? De que forma o parâmetro a afeta o gráfico da função $f(x) = x^2$?
- O que acontece quando a tem valores positivos? E negativos?
- Para que valores de a aumenta a abertura do gráfico da função? E para que valores, diminui?

- O que podem dizer sobre as funções do tipo $y = x^2 + k$? De que forma o parâmetro *k* afeta o gráfico da função $f(x) = x^2$?

- O que acontece quando *a* tem valores positivos? E negativos? **- O que podem dizer sobre as funções do tipo $y = (x - h)^2$? De que forma o parâmetro *h* afeta o gráfico da função $f(x) = x^2$?** **- O que acontece quando *a* tem valores positivos? E negativos?** Com recurso ao sketchpad, os alunos poderão verificar as transformações da função para cada um dos parâmetros. **(5) Início da resolução da ficha de trabalho "*Família de Funções Quadráticas II*"** **(5.1) Resolução do exercício 1** Após a síntese de resultados obtidos na ficha anterior, e com o auxílio da calculadora, não deverão surgir dúvidas em relação ao estudo da função. Caso surjam dúvidas pontuais, serão reforçadas as conclusões tiradas na ficha anterior. **- Como varia o gráfico com o parâmetro *k* em funções do tipo $y = x^2 + k$? O que acontece quando $k = 3$?** **- Como varia o gráfico com o parâmetro *h* em funções do tipo $y = (x + h)2$? O que acontece quando $h = -2$?** **(5.2) Resolução do exercício 2** **2.1** – Caso os alunos estejam com dúvidas em relação aos zeros da função, pode-lhes ser sugerido que esbocem, se possível, um gráfico de uma função do tipo $y = (x - h)^2 + k$ que não tenha zeros. ***Que parâmetros garantem que a função não tenha zeros?*** **2.2** – Se os alunos não conseguirem tirar conclusões acerca das características das funções deste tipo, podes-lhe ser sugerido que estudem uma outra função da família $y = (x - h)^2 + k$, com diferentes valores de *h* e *k*, para que comparem com o estudo da função t. **(5.3) Resolução do exercício 3 e 4** Após a síntese de resultados obtidos na ficha anterior, e com o auxílio da calculadora, não deverão surgir dúvidas em relação ao estudo da função. Caso surjam dúvidas pontuais, serão reforçadas as conclusões tiradas na ficha anterior. - ***Qual a diferença entre as expressões analíticas das funções s e t?*** ***- De que forma essa diferença se traduz no gráfico da função s?*** - ***Qual a diferença entre as expressões analíticas das funções b e t?*** ***- De que forma essa diferença se traduz no gráfico da função b?*** - ***Qual a diferença entre as expressões analíticas das funções s e b?*** ***- De que forma essa diferença se traduz nos gráficos das funções?*** **(5.4) Resolução do exercício 5** Caso os alunos estejam com dificuldades em construir uma resposta adequada à pergunta 5., ser-lhes-á pedido que tenham em conta todas as conclusões que foram tirando com a realização das duas fichas e que façam uma pequena síntese das ideias a reter.	**15 minutos**

(6) Registar, no quadro, o trabalho para casa. Resolver os exercícios 33 e 34 da página 42, propostas 8 e 9 da página 108 e proposta 14 da página 111.	**5 minutos**

DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS
Apesar das tarefas da aula serem realizadas em grupo, serão recolhidas as resoluções de todos os alunos, o que permitirá avaliar se cada grupo é coerente no trabalho apresentado, se foram escolhidas diferentes estratégias de resolução por parte dos grupos de alunos, de que forma os alunos fazem o registo deste tipo de tarefas investigativas e de que forma apresentam os seus registos relativos a exercícios que exijam o recurso à máquina calculadora gráfica.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Sendo esta uma turma bastante heterogénea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos. Ainda assim, caso algum grupo termine ambas as tarefas mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa. Caso **a planificação prevista não seja cumprida**, a segunda tarefa proposta será concluída na aula seguinte.

ANEXO III – Plano de Aula n.º 3 – 11 de Março de 2013

2012/2013

PLANO DE AULA

Prof. Ana Filipa Matias

11 de Março de 2013

MATEMÁTICA	Secundário – 10.ºC	Lições n.º 125 e 126

TÓPICO: Funções e Gráficos **SUBTÓPICOS:** Função Quadrática

SUMÁRIO:

Continuação do estudo de famílias de funções quadráticas.

Resolução de problemas: Ficha “Família de Funções Quadráticas 3”

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Estudar algumas características do gráfico da função quadrática. → Estudar a influências dos parâmetros a, h e k em funções do tipo $y = a(x-h)^2 + k$. → Relacionar os parâmetros a, b e c, com o eixo de simetria e o vértice das parábolas de funções do tipo $a(x-h)^2 + k$. → Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

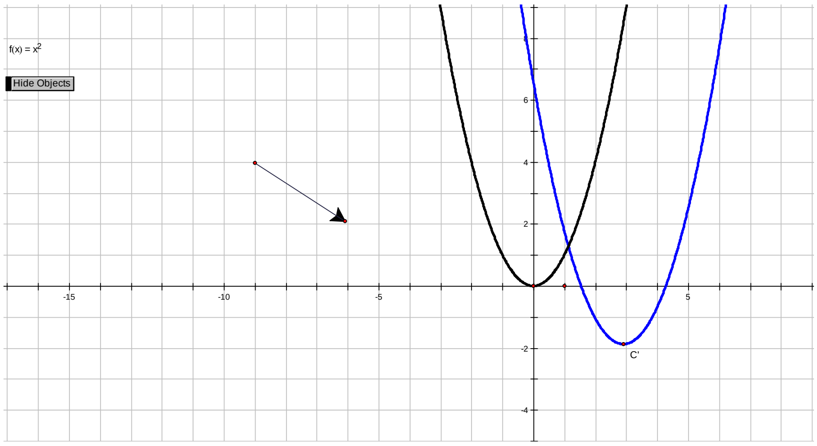
PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Noção de função; → Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos; → Noção de reflexão e eixo de simetria.	→ Raciocínio Matemático; → Comunicação Matemática.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco.

METODOLOGIA DA AULA
Sistematização das aprendizagens realizadas, em grande grupo com recurso ao *sketchpad*. Desenvolvimento de trabalho a pares - Ficha de trabalho. Discussão em grande grupo com sistematização da resolução dos problemas realizados, com recurso ao *sketchpad*.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Sistematização das aprendizagens realizadas na aula anterior.	30 minutos
→ (3) Resolução a pares e em grande grupo, da ficha de trabalho "*Família de Funções Quadráticas III*"	50 minutos
→ (4) Marcação do TPC.	5 minutos

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO
(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
(2) Sistematização dos tópicos trabalhados. **(2.1) Família de funções $f(x) = a(x-h)^2 + k$ - Variar os parâmetros *a*, *h* e *k*** Com recurso ao *sketchpad*, mostrar funções do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, fazendo variar um parâmetro de cada vez (*a*, *h* e *k*). Perguntar aos alunos: ***- Que alterações está a sofrer o gráfico da função*** ***- Qual é o parâmetro que se está a alterar?*** **(2.2) Família de funções $f(x) = (x-h)^2 + k$ - Translações segundo o vetor (*h*, *k*)** Com recurso ao *sketchpad*, mostrar o gráfico da função $f(x) = x^2$. Com a colaboração de um aluno no quadro, o professor pede ao aluno que indique onde se localizará a parábola que resulta da translação segundo um determinado vetor (que será desenhado também no *sketchpad*). Após confirmar a resposta com o *sketchpad*, pede-se ao aluno que escreva a expressão analítica que cujo gráfico é a parábola transformada. Deve ser definido o **vértice** da parábola. **Nota:** Deve pedir-se ao aluno que desenho, no quadro, apenas o vértice da função transformada.	30 minutos



__Exemplos__:
Gráficos das parábolas que sofrem uma translação segundo os vetores:
(0, 2), (1, 3), (3, 0), (-1, 1), (-2, -4), (4, -1).

Pedir agora aos alunos que, dada uma expressão do tipo $g(x) = (x-h)^2 + k$, indiquem as coordenadas do vértice da função e o vetor segundo o qual sofreu uma translação.

__Exemplos__:
Onde se situa o vértice da função $\boldsymbol{g_1(x) = (x-2)^2 + 2}$?
E da função $\boldsymbol{g_2(x) = (x+6)^2 - 1}$?
E da função $\boldsymbol{g_3(x) = (x-5)^2 - 3}$?
E da função $\boldsymbol{g_4(x) = (x+4)^2 + 5}$?

- O que podemos concluir em relação às funções do tipo $\boldsymbol{g(x) = (x-h)^2 + k}$?
- Quais as coordenadas do vértice da função $\boldsymbol{g}$?

Se os alunos tiverem dificuldades em formar uma conjetura, pode-se questionar acerca do movimento de translação do vértice da parábola.

- Onde se localiza o vértice da função $\boldsymbol{f(x) = x^2}$?
E da função $\boldsymbol{g(x) = (x-h)^2 + k}$?
- Como descrevem a translação que transformou o vértice da função $\boldsymbol{f}$ no vértice da função $\boldsymbol{g}$?
- Que translação sofreu a parábola da função $\boldsymbol{g}$ em relação à parábola da função $\boldsymbol{f}$?

__CONCLUSÕES__: Pretende-se se os alunos consigam **relacionar as coordenadas do vetor com o deslocamento do gráfico da função, o vértice da parábola e a expressão analítica da função:**
- Os gráficos das funções do tipo $\boldsymbol{f(x) = (x-h)^2 + k}$ sofrem uma **translação segundo o vetor** $\boldsymbol{(h,k)}$ e têm **vértice** $\boldsymbol{(h,k)}$

__Dificuldades__: Ainda podem surgir muitas dúvidas quanto ao

deslocamento na horizontal, quando os valores de h são positivos (translação para a direita) ou negativos (translação para a esquerda). Se surgirem dúvidas, deve ser feito um exemplo prático. <u>Exemplo</u>: Considerem-se as funções: $\boldsymbol{f(x) = x^2;}$ $\boldsymbol{g_1(x) = f(x-2) = (x-2)^2;}$ $\boldsymbol{g_2(x) = f(x+2) = (x+2)^2}$ Calculemos os zeros de cada uma das funções: $\boldsymbol{f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0;}$ $\boldsymbol{g_1(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2;}$ $\boldsymbol{g_2(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2}$	
(3) Resolução a pares e em grande grupo, da ficha "*Família de Funções Quadráticas III*"	
(3.1) Resolução do exercício 1. A expressão algébrica da função f será escrita em grande grupo, com a intervenção dos alunos. Começamos por escrever a função na forma $a(x-h)^2+k$: Para iniciar a discussão do problema, podem ser colocadas algumas questões: **- Que informação temos sobre o gráfico da função *f*?** É uma parábola de vértice (-3, 1), e que passa no ponto (-6, -3) **- Se eu já tenho as coordenadas do vértice da função, o que é que eu já consigo escrever da expressão algébrica da função?** O vértice de uma parábola cuja função é do tipo $a(x-h)^2+k$ tem coordenadas (h, k); logo, a função f vai ser do tipo: $a(x+3)^2+1$ **- Só falta saber o valor de *a*. O que podemos usar para descobrir o valor de *a*?** Sabemos que o gráfico tem a concavidade voltada para baixo, logo o valor de a é negativo. Para sabermos o valor de a, podemos usar um ponto do gráfico: (-6, -3) A função f é do tipo $y = a(x+3)^2+1$ e (-6, -3) pertence ao gráfico da função f. Então: $$-3 = a(-6+3)^2+1 \Leftrightarrow -3 = 9a+1 \Leftrightarrow 9a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{9}$$ Assim, a expressão analítica de f é do tipo $y = -\frac{4}{9}(x+3)^2+1$ Só falta desenvolver a expressão:	50 minutos

$$-\frac{4}{9}(x+3)^2+1=-\frac{4}{9}(x^2+6x+9)+1=-\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x-4+1$$
$$=-\boldsymbol{\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{3}x-3}$$

Para a função g, os alunos deverão seguir o mesmo raciocínio, a pares ou individualmente.

Um aluno fará a sua resolução no quadro:

O gráfico da função g é uma parábola de vértice (5, -4), e que passa no ponto (3, 4).

Logo, a função g vai ser do tipo: $a(x-5)^2-4$

A função g é do tipo $y=a(x-5)^2-4$ e (3, 4) pertence ao gráfico da função g.
Então:
$$4=a(3-5)^2-4 \Leftrightarrow 4=4a-4 \Leftrightarrow 4a=8 \Leftrightarrow a=2$$

Assim, a expressão analítica de f é do tipo $y=2(x-5)^2-4$

Só falta desenvolver a expressão:
$$2(x-5)^2-4=2(x^2-10x+25)-4=2x^2-20x+50-4$$
$$=\boldsymbol{2x^2-20x+46}$$

(3.2) Resolução do exercício 2.

Com a resolução deste exercício, os alunos deverão compreender que:
- o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y=ax^2+bx}$ é uma reta vertical que passa nos pontos cuja abcissa é a semissoma dos zeros da função;
- o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola, tendo como abcissa a abcissa média entre os zeros da função;

__Dificuldades__:
1 - Alguns alunos poderão ter ainda dificuldades escrever o eixo de simetria dos gráficos. ***Qual é o eixo de simetria? Como se escreve a equação que define uma reta vertical? Que particularidade tem a abcissa de todos os pontos dessa reta?***

2 - Alguns alunos poderão ter ainda dificuldades determinar o vértice das parábolas.
O que já sabes em relação às coordenadas do vértice da parábola?
Se o vértice pertence ao eixo de simetria da parábola, qual é a sua abcissa?
Sabendo a abcissa do vértice, e sendo este um ponto do gráfico da função f_i, como calculamos a sua ordenada?

(3.3) Resolução do exercício 3. Com a resolução deste exercício, os alunos deverão compreender que: - o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ é o mesmo que o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$. (O gráfico sofre apenas uma translação horizontal, o que não afeta a simetria do mesmo). - o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola, mantendo, assim, a abcissa, em relação às funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$. Apenas se altera a sua ordenada, pois tem um aumento de duas unidades. **(3.4) Resolução do exercício 4.** Com a resolução dos exercícios anteriores, os alunos já deverão ter compreendido que, a partir do cálculo dos zeros de uma função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$, conseguimos determinar a equação do eixo de simetria e a abcissa do vértice das parábolas de qualquer função do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$. Se ainda assim surgirem dúvidas quanto a este exercício, poderão ser colocadas algumas questões: **- No que respeita ao eixo de simetria da parábola o que é que mudou entre as funções f_1 e f_1+2? E em relação ao vértice da função?** **(3.5) Resolução do exercício 5.** Com a resolução dos exercícios anteriores, espera-se que os alunos sigam o raciocínio utilizado anteriormente e calcule: - os zeros da função $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$: $\boldsymbol{x \epsilon \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}}$ - a semissoma dos zeros da função anterior: $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ Estarão, assim, em condições de escrever a equação do eixo de simetria: $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$ Facilmente escreverão, também, a abcissa do vértice da parábola, que pertence ao eixo de simetria. Se ainda assim surgirem dificuldades, o professor deverá rever o raciocínio utilizado nos exercícios anteriores.	
(5) Marcação do TPC. Para TPC serão propostas as tarefas 7 e 8 da página 51 e a proposta 55 da página 127.	5 minutos

DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS
Esta aula terá momentos de consolidação de conhecimentos em grande grupo, pelo que a participação dos alunos dará alguma informação ao professor sobre as suas aprendizagens. No entanto, esta informação poderá ser um pouco vaga. Esta aula antecipará a realização de uma minificha de avaliação que terá problemas baseados nos problemas propostos para trabalho de casa, para consolidação das aprendizagens adquiridas.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Sendo esta uma turma bastante heterogénea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos. Ainda assim, caso algum grupo termine ambas as tarefas mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa. Caso **a planificação prevista não seja cumprida**, será concluída na aula seguinte.

ANEXO IV – Plano de Aula n.º 4 – 13 de Março de 2013

Escola Secundária Professor José Augusto Lucas 2012/2013	**PLANO DE AULA** **Prof. Ana Filipa Matias** **13 de Março de 2013**

MATEMÁTICA	**Secundário – 10.ºC**	**Lições n.º 127 e 128**

TÓPICO: Funções e Gráficos **SUBTÓPICOS:** Função Quadrática

SUMÁRIO:

Continuação do estudo de famílias de funções quadráticas.

Resolução de problemas. 8.ª Minificha de avaliação.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Estudar algumas características do gráfico da função quadrática. → Relacionar os parâmetros a, b e c, com o eixo de simetria e o vértice das parábolas de funções do tipo $ax^2 + bx + c$. → Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
→ Noção de função; → Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos; → Noção de reflexão e eixo de simetria.	→ Raciocínio Matemático; → Comunicação Matemática.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco.

METODOLOGIA DA AULA
Sistematização das aprendizagens realizadas, em grande grupo com recurso ao *sketchpad*. Conclusão da ficha de trabalho iniciada na aula anterior, individualmente ou a pares, com discussão em grande grupo. Realização de uma minificha de avaliação.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Sistematização das aprendizagens realizadas na aula anterior.	20 minutos
→ (3) Conclusão a pares e em grande grupo da ficha de trabalho "*Família de Funções Quadráticas III*"	25 minutos
→ (4) Realização da 8.ª minificha de avaliação.	40 minutos

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO
(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.	**5 minutos**
(2) Sistematização dos tópicos trabalhados. **(2.1) Vértice e eixo de simetria de uma parábola com expressão analítica $\boldsymbol{a(x-h)^2+k}$** Pretende-se que os alunos consigam relembrar a **relação entre as coordenadas do vetor com o deslocamento do gráfico da função, o vértice da parábola, a equação do eixo de simetria da parábola e a expressão analítica da função** : Os gráficos das funções do tipo $\boldsymbol{f(x)=a(x-h)^2+k}$: - sofrem uma **translação segundo o vetor** $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$; - têm **vértice** $(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$**;** - têm eixo de simetria definido pela equação $\boldsymbol{x=h}$**.** **(2.2) Vértice e eixo de simetria de uma parábola com expressão analítica $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$** Os alunos deverão compreender que: - o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y=ax^2+bx}$ é uma reta vertical que passa nos pontos cuja abcissa é a semissoma dos zeros da função; - o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola, tendo como abcissa a semissoma dos zeros da função; - o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y=a\quad^{2}+bx+c}$ é o mesmo que o eixo de simetria das parábolas do tipo $\boldsymbol{y=ax^2+bx}$**.** (O gráfico sofre apenas uma translação vertical, o que não afeta a simetria do mesmo). - o vértice da parábola pertence ao eixo de simetria da parábola,	**20 minutos**

mantendo, assim, a abcissa, em relação às funções do tipo $y = ax^2 + bx$. Apenas se altera a sua ordenada, pois tem um aumento de duas unidades. <u>**Dificuldades**</u>: 1 - Alguns alunos poderão ter ainda dificuldades escrever o eixo de simetria dos gráficos. ***Qual é o eixo de simetria? Como se escreve a equação que define uma reta vertical? Que particularidade tem a abcissa de todos os pontos dessa reta?*** 2 - Alguns alunos poderão ter ainda dificuldades determinar o vértice das parábolas. ***O que já sabes em relação às coordenadas do vértice da parábola?*** ***Se o vértice pertence ao eixo de simetria da parábola, qual é a sua abcissa?*** ***Sabendo a abcissa do vértice, e sendo este um ponto do gráfico da função f_i, como calculamos a sua ordenada?***	
(3) Conclusão da Ficha de Trabalho "*Família de Funções III*" **(3.4) Resolução do exercício 4.** Com a resolução dos exercícios anteriores, os alunos já deverão ter compreendido que, a partir do cálculo dos zeros de uma função do tipo $y = ax^2 + bx$, conseguimos determinar a equação do eixo de simetria e a abcissa do vértice das parábolas de qualquer função do tipo $y = ax^2 + bx + c$. Se ainda assim surgirem dúvidas quanto a este exercício, poderão ser colocadas algumas questões: **- No que respeita ao eixo de simetria da parábola o que é que mudou entre as funções f_1 e f_1+2? E em relação ao vértice da função?** **(3.5) Resolução do exercício 5.** Com a resolução dos exercícios anteriores, espera-se que os alunos sigam o raciocínio utilizado anteriormente e calcule: - os zeros da função $y = ax^2 + bx$: $x \epsilon \left\{0, -\frac{b}{a}\right\}$ - a semissoma dos zeros da função anterior: $x = -\frac{b}{2a}$ Estarão, assim, em condições de escrever a equação do eixo de simetria: $x = -\frac{b}{2a}$ Facilmente escreverão, também, a abcissa do vértice da parábola, que pertence ao eixo de simetria. Se ainda assim surgirem dificuldades, o professor deverá rever o raciocínio utilizado nos exercícios anteriores.	**25 minutos**

(5) Realização da 8.ª Mini ficha de avaliação. Os alunos serão divididos em duas salas.	**40 minutos**

ANEXO V – Plano de Aula n.º 5 – 14 de Março de 2013

Escola Secundária Professor José Augusto Lucas
2012/2013

PLANO DE AULA
Prof. Ana Filipa Matias
14 de Março de 2013

MATEMÁTICA	**Secundário – 10.ºC**	**Lições n.º 129 e 130**

TÓPICO: Funções e Gráficos **SUBTÓPICOS:** Função Quadrática

SUMÁRIO:
Resolução de Problemas em trabalho de grupo sobre funções quadráticas.
Entrega das minifichas de avaliação. Autoavaliação.

PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA
→ Resolver problemas, utilizando funções quadráticas; → Entender o significado de algumas propriedades do gráfico da função quadrática no contexto dos problemas; → Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS	**CAPACIDADES TRANSVERSAIS**
→ Noção de função; → Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos; → Equações de 2.º grau; → Área de polígonos.	→ Resolução de Problemas; → Comunicação Matemática.

RECURSOS	
A trazer pelo aluno	**A trazer pelo professor**
→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco.

METODOLOGIA DA AULA
Desenvolvimento de trabalho em pequenos grupos (3 a 4 elementos) - Fichas de trabalho. Discussão e sistematização, em turma, da resolução dos problemas realizados, com recurso ao *sketchpad*.

MOMENTOS DA AULA	
→ (1) Registo do sumário. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (“*Deslizando sobre a diagonal*”)	50 minutos
→ (3) Discussão e sistematização sobre a tarefa realizada.	20 minutos
→ (4) Entrega das minifichas; autoavaliação; marcação do TPC.	15 minutos

DESENVOLVIMENTO DA AULA	TEMPO PREVISTO
(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.	**5 minutos**
(2) Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho “*Deslizando sobre a diagonal*”	
(2.1) Esboço do gráfico da função.	**20 minutos**
Com recurso ao *sketchpad*, a turma irá observar uma animação que ilustra a situação descrita na tarefa “*Deslizando sobre a diagonal*”. Pretende-se que os alunos esbocem um gráfico que traduza a variação da área polígono formado pela zona sombreada, resultante do deslocamento do ponto P e que acompanhem o gráfico com um pequeno texto que explique as opções tomadas quanto à monotonia, zeros domínio e contradomínio da função. A tarefa pode ser discutida em grupo, mas o registo será individual, sendo recolhido de imediato. Não serão dadas quaisquer indicações adicionais à elaboração do esboço. Os alunos deverão ser informados que terão 10 minutos para resolver esta tarefa.	
(2.2) Resolução da ficha de trabalho “*Deslizando sobre a diagonal*”	**30 minutos**
Será, então, distribuída a ficha de trabalho “*Deslizando sobre a diagonal*”. Os alunos deverão ser informados que terão 30 minutos para resolver esta tarefa. O professor deve circular pelos grupos e: - Fazer um levantamento de questões que possam surgir e que devam ser discutidas em grande grupo; - Esclarecer dúvidas pontuais, orientando os alunos para atingirem o objetivo da tarefa; - Acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, fazendo questões orientadoras de forma a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades, tendo em conta (1) as estratégias utilizadas; (2) o ritmo de trabalho dos diferentes grupos;	

(2.2.1) Resolução do exercício 1

Dificuldades: Alguns alunos poderão ter dificuldade em calcular a distância entre os pontos E e F.

Os alunos deverão identificar a semelhança entre os triângulos [ABD] e [AFE] e traduzi-la na razão entre comprimentos: ***que polígonos estão representados na figura? Qual a relação entre estes polígonos? De que forma poderei calcular a área do triângulo [AFE]? Haverá relação entre a o comprimento de [EF] e alguma outra medida?***

(2.2.2) Resolução do exercício 2

Após a resolução de **1**, os alunos não deverão ter dificuldades em fazer o exercício **2**.
Os alunos deverão perceber que a razão entre a base e a altura dos triângulos é de 6/5.
Deverão ser alertados para a justificação dos cálculos que utilizam.

(2.2.3) Resolução do exercício 3.

Possíveis estratégias de resolução:

(E1) $A_{[ABFED]} = A_{[ABCD]} - A_{[CEF]}$

(E2) $A_{[ABFED]} = A_{[ABD]} + A_{[BDEF]}$

Para qualquer das estratégias, é necessário achar o comprimento de [EF]

Dificuldades: Alguns alunos poderão ter dificuldade em calcular a distância entre os pontos E e F.

Os alunos deverão identificar a semelhança entre os triângulos [BCD] e [FCE] e traduzi-la na razão entre comprimentos: ***que polígonos estão representados na figura? Qual a relação entre estes polígonos? Haverá relação entre a o comprimento de [EF] e alguma outra medida?***

(2.2.4) Resolução do exercício 4.

Após a resolução de **3**, os alunos não deverão ter dificuldades em fazer o exercício **4**.
Poderá surgir alguma confusão ao traduzirem os comprimentos em função de x. Os alunos deverão recordar que x é a variável que representa $\overline{CA}$.
Deverão ser alertados para a justificação dos cálculos que utilizam.

(2.2.5) Resolução do exercício 5.

Dificuldades: Os alunos poderão ter dificuldade em definir analiticamente a função S uma vez que, nas alíneas anteriores, escreveram duas expressões distintas para o cálculo da área da região sombreada.
Deverão compreender porque houve necessidade de escrever essas duas expressões.
Como varia a região sombreada? Porque é que tivemos que definir duas

expressões distintas? Para que valores de x temos de recorrer à expressão de nos dá a área do triângulo? Para que valores de x temos de recorrer à expressão de nos dá a área do pentágono? **(2.2.6) Resolução do exercício 6.** Para este exercício, os alunos deverão utilizar toda a informação que obtiveram nas alíneas anteriores, e poderão recorrer à calculadora gráfica. Serão confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Neste sentido, deverão justificar todas as opções tomadas no desenho do gráfico (domínio, contradomínio, pontos relevantes) **(3) Discussão sobre a tarefa realizada** Numa primeira fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto dos alunos entre a sua primeira perceção de como seria o gráfico que traduz a situação da tarefa, e de como é realmente o gráfico da função. Poderão ser colocadas algumas questões neste sentido: ***O que esperavam, inicialmente, do gráfico da função?*** ***Quais as principais diferenças entre o gráfico que esboçaram e o gráfico que desenharam após a análise da função?*** ***Porque temos de recorrer a uma função por ramos para descrever a situação?*** ***De que forma se processa o crescimento da área da figura sombreada?*** Os alunos deverão compreender que, à medida que o ponto P se vai deslocando (sempre à mesma velocidade), a área não aumenta sempre da mesma forma. O losango é constituído por dois triângulos congruentes, em que um é a reflexão do outro. Inicialmente, à medida que P se vai afastando de A, a região sombreada forma um triângulo, cuja área vai aumentando cada vez mais depressa, até que o ponto P atinge o eixo de simetria entre os dois triângulos. A partir do momento em que o ponto P se encontra sobre o segundo triângulo, sendo este uma reflexão do primeiro, a área sombreada vai aumentando cada vez mais devagar. A região sombreada forma, agora, um pentágono, cuja área não aumenta à mesma velocidade que a área do triângulo. ***Se considerarmos a velocidade de crescimento da área sombreada, como é que esta vai variar? Porquê?*** Esta discussão deve ser acompanhada da visualização gráfica através do *sketchpad*, para uma melhor compreensão. Os alunos deverão, também, partilhar quais as principais dificuldades na resolução do problema. **Nota:** Caso ainda haja tempo de aula, e apenas nesta situação, poderá ser feita a correção dos exercícios 2, 4 e 5 no quadro, com a colaboração dos alunos.	**20 minutos**
Nesta segunda fase de discussão, devem ser abordadas (1) a importância de justificar os raciocínios que apoiam os cálculos efetuados – nomeadamente, evidenciar a semelhança de triângulos (2) as expressões dos comprimentos necessários em função da variável x.	**15 minutos**

(4) Entrega das minifichas de avaliação; autoavaliação; marcação de TPC para férias. Serão entregues as minifichas de avaliação O professor deverá alertar os alunos para alguns erros cometidos, nomeadamente quanto à: - Resolução de inequações com módulos; - Apresentação de cálculos na resolução de problemas; - Falha de justificação de propriedades utilizadas na resolução de problemas (semelhança de triângulos) **Exercícios propostos para férias:** Resolver os exercícios do 2.º volume do manual, 35 - 48; Proposta 9, das páginas 43 a 54.	

DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS
Apesar das tarefas da aula serem realizadas em grupo, serão recolhidas as resoluções de todos os alunos, o que permitirá avaliar se cada grupo é coerente no trabalho apresentado, se foram escolhidas diferentes estratégias de resolução por parte dos grupos de alunos, de que forma os alunos fazem o registo deste tipo de tarefas investigativas e de que forma apresentam os seus registos relativos a exercícios que exijam o recurso à máquina calculadora gráfica.

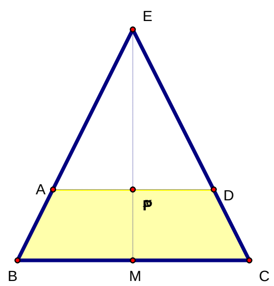
ATIVIDADES COMPLEMENTARES
Sendo esta uma turma bastante heterogénea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos. Apenas se iniciará a discussão da tarefa em grande grupo, quando a maioria dos alunos termine a ficha de trabalho. Assim, caso algum grupo termine a tarefa mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa.

ANEXO VI – Ficha de Trabalho n.º 1 – *Deslizando Sobre o Triângulo*

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA (ADAPTADO DE *MATEMÁTICA 10*, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

DESLIZANDO SOBRE O TRIÂNGULO

1. [BCE] é um triângulo isósceles. A sua altura mede 5 cm, assim como a sua base, [BC]. **P** é um ponto que se desloca de M (ponto médio de [BC]) para E, arrastando o segmento [AD] nesse movimento.



   1.1. Mostra que se o ponto **P** se deslocar 3 cm, então a área do trapézio [ABCD] é igual a 10,5 cm^2.

   1.2. Quando **P** se deslocar 4 cm, qual é a área do trapézio [ABCD]?

   1.3. Qual deve ser o valor do deslocamento do ponto **P** para que a área do trapézio [ABCD] é igual a 8 cm^2?

   1.4. Designa por $\boldsymbol{x}$ o deslocamento de P e por **A** a área de [ABCD]. Esboça o gráfico que relaciona **A** com x.

   1.5. Mostra que a área do trapézio [ABCD] é dada pela expressão algébrica $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$. Indica o seu domínio e contradomínio.

2. Considera agora a função $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$,fora do contexto do problema.

   2.1. Com o auxílio da calculadora, esboça um gráfico da função A.
   Que tipo de gráfico é?

   2.2. Indica o domínio e o contradomínio da função.

   2.3. Faz o estudo do sinal e dos zeros da função.

   2.4. Indica os intervalos de monotonia da função.

3. Escreve uma expressão que relacione a área (T) do triângulo [ADE] com o deslocamento (x) de P. Indica o seu domínio e contradomínio.

4. Considera agora a função T, fora do contexto do problema.

    4.1. Com o auxílio da calculadora, esboça um gráfico da função. Que tipo de gráfico é?

    4.2. Indica o domínio e o contradomínio da função.

    4.3. Faz o estudo do sinal e dos zeros da função.

    4.4. Indica os intervalos de monotonia da função.

ANEXO VII – Ficha de Trabalho n.º 2 – *Áreas e Perímetros de Retângulos*

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA (ADAPTADO DE *MATEMÁTICA 10*, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

ÁREAS E PERÍMETROS DE RETÂNGULOS

1. Desenha, no quadriculado abaixo, alguns retângulos com perímetro 20 cm e calcula a sua área.

    1.1. Se um dos lados do retângulo medir 3,5 cm, quanto mede a sua área?

    1.2. Qual deve ser a medida dos lados do retângulo, para que a sua área seja 20 cm^2?

2. De todos os retângulos de perímetro 20, qual é o que tem área máxima?
   Par responder a este problema, começa por escrever a expressão da área do retângulo em função da medida de um dos lados. Desenha o gráfico e procura o máximo. Indica o domínio e contradomínio da função.

ANEXO VIII – Ficha de Trabalho n.º 3 – *Família de Funções Quadráticas I*

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES E UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA (ADAPTADO DE MATEMÁTICA 10, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

FAMÍLIA DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS I

Responde às questões com recurso à calculadora gráfica.

1. Considera as seguintes funções da família $y = ax^2$,em que a é um número real diferente de zero:

   $f(x) = x^2 \quad g(x) = 2f(x) \quad i(x) = 0{,}5f(x) \quad j(x) = -2f(x) \quad m(x) = -0{,}5f(x)$

   1.1. Qual é a expressão analítica de cada uma das funções *g, i, j* e *m?*
   1.2. Representa no mesmo referencial um esboço dos gráficos destas funções.
   1.3. Analisa cada uma das funções quanto ao domínio, contradomínio, zeros e variação de sinal, extremos e monotonia.
   1.4. Agrupa as funções de acordo com características comuns.

2. Considera as seguintes funções da família $y = x^2 + k$, em que k é um número real:

   $$f(x) = x^2 \quad n(x) = f(x) + 3 \quad p(x) = f(x) - 5$$

   2.1. Qual é a expressão analítica de cada uma das funções *n e p?*
   2.2. Representa no mesmo referencial um esboço dos gráficos destas funções.
   2.3. Como se pode obter o gráfico de *n* a partir do gráfico de *f*? Como se pode obter o gráfico de *p* a partir do gráfico de *f*?
   2.4. Analisa cada uma das funções quanto ao domínio, contradomínio, zeros e variação de sinal, extremos e monotonia.
   2.5. O que é que as três funções têm em comum?

3. Considera agora as seguintes funções da família $y = (x - h)^2$, em que h é um número real:

   $$f(x) = x^2 \quad q(x) = f(x - 5) \quad r(x) = f(x + 4)$$

   3.1. Qual é a expressão analítica de cada uma das funções *q e r?*
   3.2. Representa no mesmo referencial um esboço dos gráficos destas funções.
   3.3. Como se pode obter o gráfico de *q* a partir do gráfico de *f*? Como se pode obter o gráfico de *r* a partir do gráfico de *f*?
   3.4. Analisa estas funções quanto às seguintes características: domínio, contradomínio, zeros e variação de sinal, extremos e monotonia.

ANEXO IX – Ficha de Trabalho n.º 4 – *Família de Funções Quadráticas II*

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A — 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES E UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA (ADAPTADO DE MATEMÁTICA 10, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

FAMÍLIA DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS II

1. Considera a função $t(x) = (x-2)^2 - 3$.
   1.1. Como se pode obter o gráfico de t a partir do gráfico de $f(x) = x^2$?
   1.2. Esboça o gráfico da função t.

2. Considera a família de funções quadráticas do tipo $y = (x-h)^2 + k$, em que h e k representam números reais.
   2.1. Podemos afirmar que uma função deste tipo tem sempre zeros? Porquê?
   2.2. O que sabemos acerca da monotonia, extremos e contradomínio de uma função deste tipo?

3. Considera, agora, a função $s(x) = 2(x-2)^2 - 3$.
   Quais as diferenças e semelhanças que o gráfico desta função tem com o gráfico da função t?

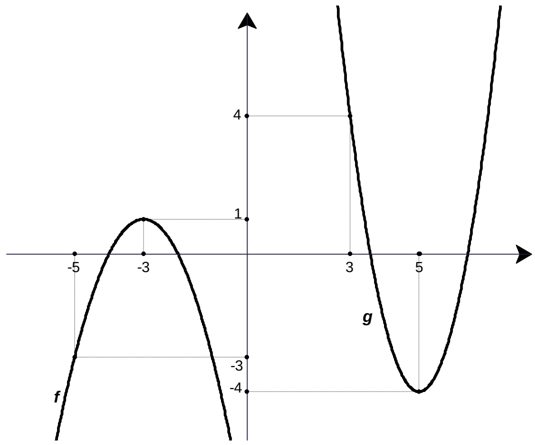
4. Considera a função $b(x) = -2(x-2)^2 - 3$.
   Quais as diferenças e semelhanças que o gráfico desta função tem com o gráfico da função t?

5. Considera a família de funções quadráticas do tipo $y = a(x-h)^2 + k$, em que a, h e k representam números reais ($a \neq 0$).
   Elabora um pequeno relatório explicando a influência destes parâmetros nas características das funções desta família.

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES E UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA III – VÉRTICE DA PARÁBOLA (ADAPTADO DE MATEMÁTICA 10, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

FAMÍLIAS DE FUNÇÕES III

1. Para cada uma das funções f e g, escreve a sua expressão algébrica na forma $ax^2 + bx + c$.
   Sugestão: Começa por escrever cada função na forma $a(x-h)^2 + k$.



Como encontrar o vértice de uma parábola cuja expressão analítica é

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c?}$$

Parábolas de expressão analítica $\boldsymbol{y = ax^2 + bx}$:

2. Considera as funções $f_1(x) = 2x^2 + 4x$, $f_2(x) = 6x^2 + 12x$ e $f_3(x) = -4x^2 - 8x$
   2.1. No mesmo referencial, esboça o gráfico das funções f_1, f_2 e f_3
   2.2. Calcula os zeros da função.
   2.3. Qual o eixo de simetria de cada um dos gráficos?
   2.4. Indica as coordenadas do vértice de cada parábola.
   2.5. Como se relacionam os zeros da função, o eixo de simetria e o vértice da parábola?

Parábolas de expressão analítica $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$:

3. Considera as funções $f_1(x) + 2$, $f_2(x) + 2$ e $f_3(x) + 2$. Observa, na calculadora gráfica, os gráficos de cada uma das funções.
   3.1. Atendendo ao estudo das funções do exercício 2, o que concluis em relação ao eixo de simetria e ao vértice da parábola?
   3.2. Escreve a expressão analítica de cada uma das funções $f_1(x) + 2$, $f_2(x) + 2$ e $f_3(x) + 2$.

4. Considera a função $g(x) = 2x^2 - 6x + 1$.
   4.1. A partir do cálculo dos zeros de $2x^2 - 6x$, escreve a equação do eixo de simetria do gráfico da função *g* e a abcissa do vértice da parábola.
   4.2. Calcula a ordenada do vértice da parábola do gráfico da função g.

5. Considera a função $h(x) = ax^2 + bx + c$. Em função de a, b e c indica:
   5.1. A equação do eixo de simetria do gráfico da função *h*.
   5.2. A abcissa do vértice da parábola do gráfico da função *h*.

ANEXO XI – Ficha de Trabalho N.º 6 (1.ª Parte) – *Deslizando Sobre a Diagonal* – Esboço do Gráfico

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES E UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA III – VÉRTICE DA PARÁBOLA (ADAPTADO DE MATEMÁTICA 10, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

DESLIZANDO SOBRE A DIAGONAL – ESBOÇO DO GRÁFICO

Esboça o gráfico que relaciona a área da região sombreada com o deslocamento do ponto P.

Num pequeno texto, explica todas as opções tomadas (monotonia, domínio, contradomínio, …)

ANEXO XII – Ficha de Trabalho N.º 6 (2.ª Parte) – *Deslizando Sobre a Diagonal*

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
MATEMÁTICA A 10.º ANO, MARÇO DE 2013
ASSUNTO: TRANSFORMAÇÃO DE FUNÇÕES E UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA III – VÉRTICE DA PARÁBOLA (ADAPTADO DE MATEMÁTICA 10, EDIÇÕES CONTRAPONTO).
NOME: N.º

DESLIZANDO SOBRE A DIAGONAL

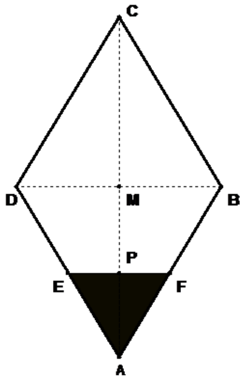
[ABCD] é um losango cujas diagonais medem 20 cm e 12 cm.

P é um ponto que se desloca de A para C, arrastando nesse movimento [EF].

Designa por x o deslocamento de P.

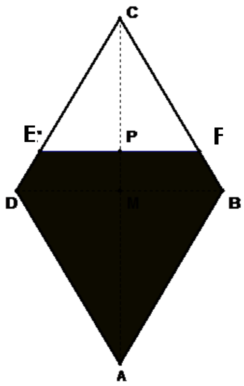
1. Qual a área da região sombreada quando P dista 4 cm de A?

2. Quando o ponto ponto P se movimenta no segmento [AM], a região sombreada forma um triângulo, como ilustra a figura ao lado.
   Escreve uma expressão que defina a área do triângulo em função de x.



3. Qual a área da região sombreada quando P dista 12 cm de A?

4. Quando o ponto ponto P se movimenta no segmento [MC], a região sombreada forma um pentágono, como ilustra a figura ao lado.
   Escreve uma expressão que defina a área do pentágono em função de x.



5. Define analiticamente a função ***S***, que relaciona a área da região sombreada com o deslocamento do ponto P.

6. Desenha o gráfico de *S.* <u>Justifica</u> as opções tomadas.

ANEXO XIII – 8.ª Minificha de Avaliação (13 de Março de 2013)

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
Matemática A 10º Ano Turma C
8ª Minificha de avaliação (exercícios adaptados dos trabalhos de casa) 13.Mar.2013

NOME:________________________ nº:_____ Classif.:___________ Prof.:______________

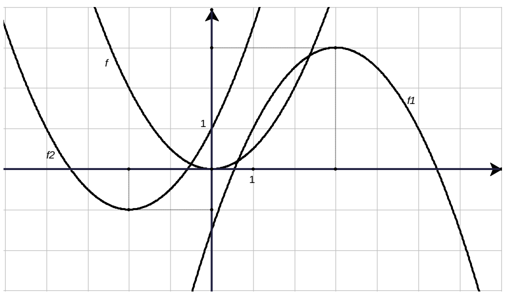
1. Considera a função f definida por $f(x) = |x + 4| - 3$
   1.1. Escreve $f(x)$ sem utilizar módulos.

   1.2. Resolve analiticamente cada uma das seguintes condições:

      1.2.1. $f(x) \geq 2$;

      1.2.2. $f(x) < 6$

2. No referencial da figura estão representadas várias parábolas com a mesma "abertura".
   Sabendo que f é uma função quadrática definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, escreve a expressão analítica que define as funções f_1 e f_2.

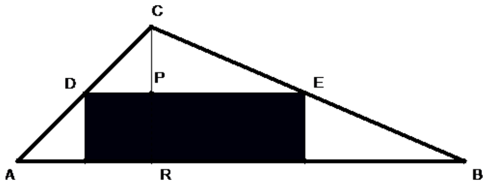


3. Em relação a referenciais xOy o.m. a parábola a seguir representada corresponde a uma função quadrática, cuja expressão é: $g(x) = -(x + 3)^2 + 2$.

   3.1. Marca o referencial correspondente à parábola ao lado.

   3.2. Explica como se pode obter o gráfico de g a partir do gráfico da função f definida por $f(x) = x^2$

4. Na figura está representado um triângulo [ABC], sendo [CR] a altura relativa ao lado [AB]. Sabe-se que $\overline{AB} = 10\ cm$ e $\overline{CR} = 2\ cm$. Admite que P é um ponto móvel pertencente a [CR] a partir do qual se constrói um retângulo em que um dos lados está contido em [AB], tal como ilustra a figura. Considera $\overline{CP} = x$.



4.1. Mostra que a área do retângulo pode ser obtida e função de x, pela expressão $A(x) = -5x^2 + 10x$

4.2. Determina quais devem ser as dimensões do retângulo que admite a área máxima.

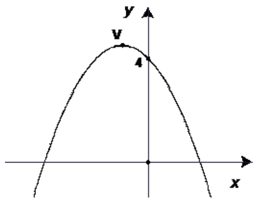
Cotações	**1.1**	**1.2.1**	**1.2.2.**	**2**	**3.1**	**3.2**	**4.1**	**4.2**
	25	*25*	*25*	*30*	*20*	*20*	*30*	*25*

ANEXO XIV – 9.ª Minificha de Avaliação (24 de Abril de 2013)

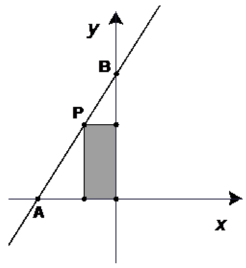
ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
Matemática A 10º Ano Turma C
9ª Mini-ficha de avaliação (exercícios adaptados dos trabalhos de casa) 24 abril 2013

NOME: ________________________________ nº: _____ Classif.:____ Prof.:____________

1. Na figura está desenhada uma parábola que interseta o eixo *Oy* no ponto de coordenadas (0,4) e cujo vértice é o ponto V(-1;4,5). Determina uma equação da parábola (mostra claramente o raciocínio que seguiste).



2. Na figura está desenhada parte de uma reta. O ponto P pertence a essa reta, e desloca-se entre os pontos A(—3,0) e B(0,6). Considera um retângulo em que dois dos seus lados estão contidos nos eixos coordenados e o ponto P é um dos seus vértices, tal como a figura sugere. Determina uma expressão que permita obter a área desse retângulo em função da abcissa *x* do ponto P (apresenta a expressão na sua forma mais simplificada).



3. A função L representa o lucro, em milhares de euros, da produção mensal de uma fábrica, de *x* centenas de peças e é definida por: $\mathbf{L(x)=-0{,}4x^2+3x-2}$.

3.1. Calcula L(0) e diz o que representa o valor obtido.

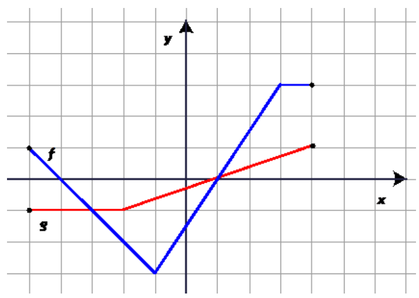
3.2. O que significa, no contexto do problema, a expressão $\frac{L(x)}{100x}$?

3.3. Sem recorrer às capacidades gráficas da tua calculadora, calcula quantas peças devem ser produzidas para manter um lucro superior a 2000 €.

4. Considera as funções f e g, representadas graficamente no referencial o.n. da figura.

A unidade, em qualquer dos eixos, é o lado da quadrícula.

Indica o conjunto solução de cada uma das condições seguintes:

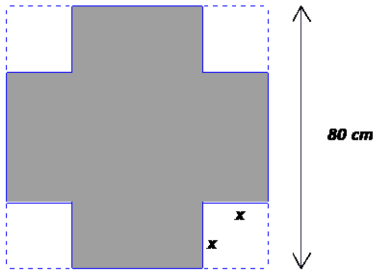


4.1. $f(x) \leq g(x)$

4.2. $f(x).g(x) > 0$

4.3. $f(x).(2x^2+3x-2)<0$ (mostra claramente o teu raciocínio).

5. A partir de folhas metálicas com 80 cm de lado, uma empresa produz reservatórios, sem tampa, com a forma de paralelepípedos. Dos cantos da folha, extraem-se quadrados de modo a permitir a construção dos reservatórios, como a figura ilustra.



Determina as dimensões do reservatório de modo que a sua capacidade seja 32 litros e a altura seja a maior possível.

COTAÇÕES:	*1.*	*2.*	*3.1.*	*3.2.*	*3.3.*	*4.1.*	*4.2.*	*4.3.*	*5.*
	20	*20*	*20*	*20*	*20*	*25*	*25*	*25*	*25*

ANEXO XV – 5.º Teste de Avaliação (2 de Maio de 2013)

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
Matemática A 10º Ano Turma C
5º TESTE 2 de maio de 2013

NOME: ____ nº: _______

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla. Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, apenas o número de cada item e a letra correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- Não apresente cálculos, nem justificações.
- Se apresentar mais do que uma opção, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Qual das seguintes condições define, em referencial o.n. *Oxyz*, uma reta paralela ao eixo *Ox*?

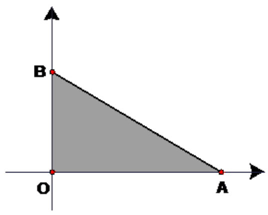
[A] $(x, y, z) = (7, 0, 0) + k\,(1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ **[B]** $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k\,(0, 0, 7)$, $k \in \mathbb{R}$

[C] $(x, y, z) = (1, 1, 0) + k\,(7, 0, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ **[D]** $(x, y, z) = (0, 0, 7) + k\,(1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

2. Na figura está representada, em referencial o.n.*xOy*, a reta AB. Os pontos A e B pertencem aos eixos coordenados. A abcissa do ponto A é 12. A área do triângulo [OAB] é 36. Uma equação reduzida da reta AB é:

[A] $y = 0{,}5x + 6$ [B] $y = -2x + 6$

[C] $y = -0{,}5x + 6$ [D] $y = -0{,}5x + 12$

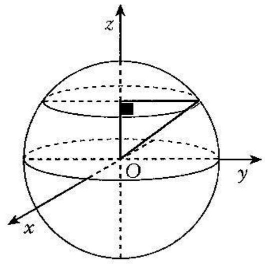


3. Considera dois pontos, A e C, num referencial o.n. *xOy*, cujas coordenadas são A(c,0) e B(0,c), com c≠0. A mediatriz do segmento de reta [AB] é a reta de equação:

[A] $(x, y) = (-1, -1) + k\,(c, c)$, $k \in \mathbb{R}$ **[B]** $x + y = 0$

[C] $x - y = c$ **[D]** $(x, y) = (0, 0) + k\,(-c, c)$, $k \in \mathbb{R}$

4. O conjunto dos pontos da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que têm cota 3 é:



(A) a circunferência de centro (0,0,3) e raio 4 contida no plano de equação z=3;

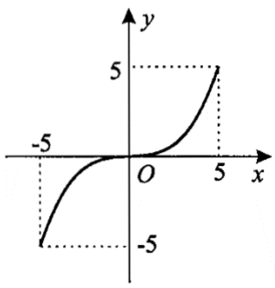
(B) a circunferência de centro (0,0,3) e raio 3 contida no plano de equação z=3;

(C) o círculo de centro (0,0,3) e raio 4 contido no plano de equação z=3;

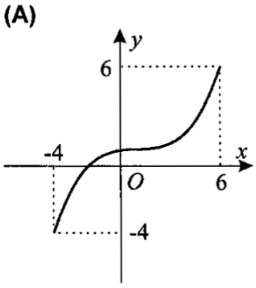
(D) o círculo de centro (0,0,3) e raio 3 contido no plano de equação z=3.

5. Considera a função f, de domínio [-5,5]. Representada graficamente na figura junta.

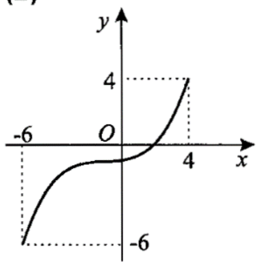
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função *g*, definida por $g(x) = 1 + f(x+1)$?



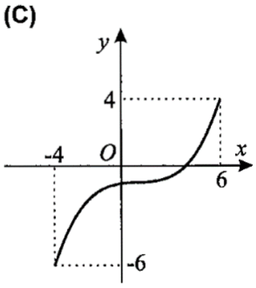
(A)



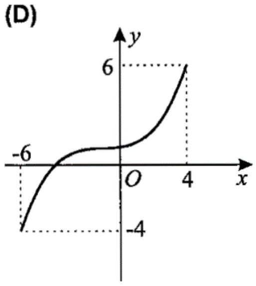
(B)



(C)



(D)



RESPOSTAS DA ESCOLHA MÚLTIPLA:

1._____ 2. _____ 3. _____ 4. _____ 5. _____

GRUPO II

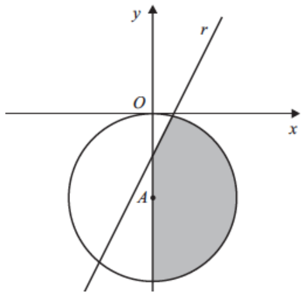
Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Considera, num referencial o.n. xOy:

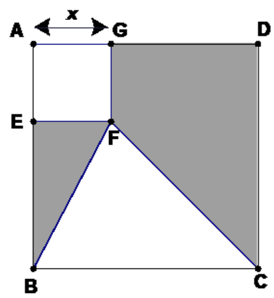
   - a reta *f*, definida por $y = 2x - 1$;
   - ponto A de coordenadas $(0,-2)$;
   - a circunferência de centro A e que passa por O.

   Define, por uma condição, a região representada a sombreado, incluindo a fronteira.



teste intermédio, março de 2012

2. Na figura está desenhado um quadrado [ABCD] de lado 8. O ponto G desloca-se de A para D ao mesmo tempo que o ponto E se desloca de A para B, ambos à mesma velocidade.



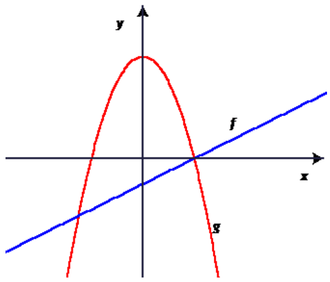
2.1. Mostra que a área sombreada, em função do deslocamento do ponto G, pode ser dada por: $a(x) = -x^2 + 4x + 32$.

2.2. Calcula, **sem recorrer às capacidades da calculadora gráfica**, os valores de x para os quais a área sombreada é inferior a metade da área de [ABCD].

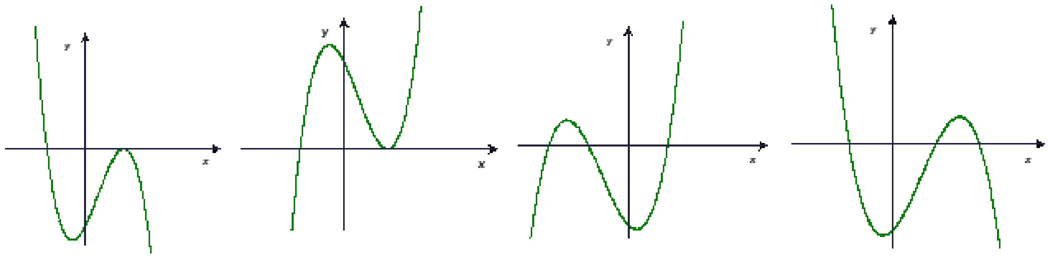
3. Considera a função $f(x) = |x^2-1|$ e a função g, cujo gráfico se pode obter a partir do gráfico de f por meio de uma translação associada ao vetor $(-3,2)$.

Desenha o gráfico da função g, indica no gráfico as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função e define-a sem utilizar o símbolo de módulo.

4. Na figura estão desenhadas partes do gráfico de duas funções, uma função quadrática e uma função afim.



Apenas um dos quatro gráficos que se apresentam de seguida pode corresponder à função *h(x)= f(x).g(x)*. Explica qual é o gráfico correto, apresentando as razões pelas quais rejeitas os que consideras incorretos.



(A) (B) (C) (D)

5. Um empresa vinícola decidiu fazer um estudo relativo à sua produção de vinho, com vista a obter maior lucro. Esse estudo foi feito a partir da análise da receita obtida pela empresa com a produção de vinho e da análise da despesa que a empresa tem de suportar com essa produção, em cada ano vinícola.

Representando por x a quantidade de vinho produzido, em milhares de litros, admite que a receita, em milhares de euros, é dada, em função de x, por $r(x) = -0{,}0137\, x^2 + 6{,}85\, x$, com $0 \leq x \leq 250$, e que a despesa, também em milhares de euros, é dada, em função de x, por $d(x) = 0{,}411\, x + 383{,}6$ com $0 \leq x \leq 250$.

Admite ainda que o lucro é a diferença entre a receita e a despesa.

5.1. Determina para que valores de vinho produzido, em milhares de litros, a receita obtida com a produção é inferior à despesa efetuada com essa produção. Apresenta a resposta na forma de intervalo de números reais.

5.2. Entre que valores deverá estar compreendida a quantidade de vinho a produzir, em milhares de litros, para que a empresa tenha um lucro entres 123 300 euros e 315 100 euros, incluindo estes valores?

6. Seja f a função, de domínio R, definida por $f(x) = (x^2 + 5x + 4).(-0{,}1x^2 + 1{,}2x - 2)$

6.1. **Sem recorrer à calculadora** a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos, resolve a inequação $f(x) > 0$. Apresenta o conjunto solução utilizando a notação de intervalos de números reais.

6.2. Sejam A e B os pontos do gráfico de f cujas abcissas são -1 e 2, respetivamente. Seja C o ponto cuja ordenada é o máximo absoluto desta função.

Determina a área do triângulo [ABC], percorrendo as etapas indicadas a seguir:

- recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualiza o gráfico de f, escolhendo uma janela que te permita visualizar também o ponto C;

- reproduz, na folha de respostas, o que visualizaste na calculadora, assinalando também os pontos A, B e C;
- recorrendo à ferramenta adequada da calculadora, determina as coordenadas do ponto C e indica-as no gráfico que desenhaste;
- Calcula a área pedida.

COTAÇÕES

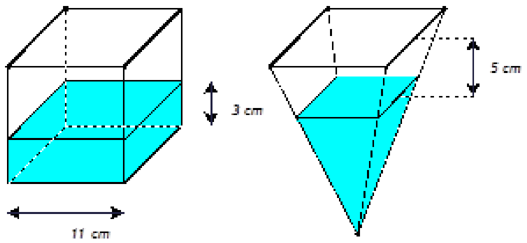
GRUPO I	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1**	**6.2.**
9 X 5 = 45	12	13	15	20	20	15	20	20	20

ANEXO XVI – 10.ª Minificha de Avaliação (16 de Maio de 2013)

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS
Matemática A 10º Ano Turma C
10ª Mini-ficha de avaliação (exercícios adaptados dos trabalhos de casa) 16 maio 2013

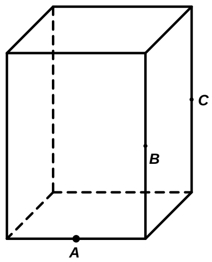
NOME: ______________________________ nº: _____ Classif.:____ Prof.:____________

1. Na figura estão representados dois recipientes, um tem a forma de um cubo e outro de uma pirâmide quadrangular regular. Em ambos há igual quantidade de líquido.



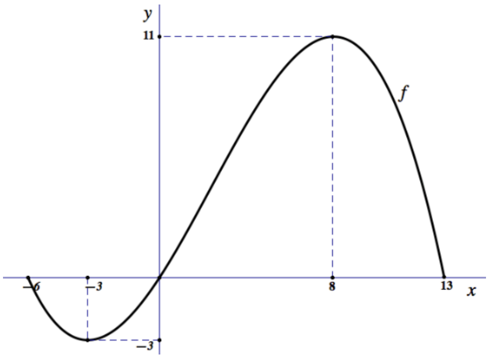
Determina a altura do recipiente que tem a forma de pirâmide, sabendo que a área da superfície do líquido nesse recipiente é 90,75 cm^2.

2. Na figura está representado um prisma quadrangular regular, em que as arestas da base medem 24 e a altura 32. Os pontos A, B e C, assinalados na figura, são os pontos médios de três arestas do sólido.



Qual é o valor exato da área da secção produzida no prisma pelo plano ABC?

3. Na figura está representado o gráfico de uma função f, cujo domínio é $[-6,13]$.



3.1. Sejam g, h e j as funções definidas por

- $g(x) = -f(x)$
- $h(x) = f(x) + 3$
- $j(x) = f(x-1)$.

Indica o contradomínio e os zeros de cada uma das funções (explica o raciocínio).

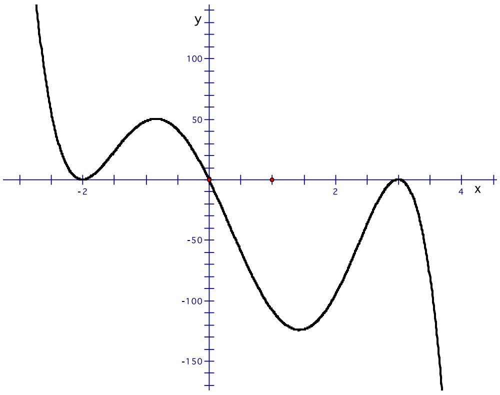
3.2. Indica o número de soluções da equação: $|f(x)| = 3$ (explica o raciocínio).

4. Determina o polinómio A(x), sabendo que, ao dividi-lo por B(x) = $2x + 1$, se obtém resto 5 e o quociente é Q(x) = $x^2 - 3x$.

5. Decompõe em fatores do primeiro grau o polinómio $x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 6x - 5$, sabendo que -1 é um zero duplo.

6. Na figura está desenhada parte de um gráfico de uma função polinomial do 5º grau, cujos zeros são -2, 0 e 3. Sabe-se que a imagem de -1 é 48.

Escreve uma expressão analítica da função.



COTAÇÕES:	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.**	**6.**
	30	**30**	**30**	**25**	**25**	**30**	**30**

ANEXO XVII – Ficha Informativa – Calculadora Gráfica

ESCOLA SECUNDÁRIA PROFESSOR JOSÉ AUGUSTO LUCAS — MATEMÁTICA A
CALCULADORA GRÁFICA – ALGUMAS INSTRUÇÕES — 10.º ANO, FEVEREIRO 2013

ESCREVER UMA FUNÇÃO NA CALCULADORA, RECORRENDO A UMA FUNÇÃO ANTERIOR			
CASIO	**TEXAS INSTRUMENTS**	Exemplo: Escrever as funções *f, g,h, I* e *j*:	
MENU > GRAPH Y1: Escrever função Y2: Carregar **seta direita** > Selecionar **Y** (tecla **F1**); > escrever índice relativo à função > Escrever as transformações da nova função.	Tecla **Y=** Y_1= Escrever função Y_2= Tecla **VARS** > Selecionar **Y-VARS** > Selecionar **1: Function** > Selecionar a função pretendida (ex: 1: Y_1) > Escrever as transformações da nova função.	$f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + 2 = f(x) + 2$ $h(x) = (x+2)^2 = f(x+2)$ $i(x) = 2x^2 = 2.f(x)$ $j(x) = (2x)^2 = f(2x)$	**Y1: X²** **Y2: Y1+2** **Y3: Y1(X+2)** **Y4: 2xY1** **Y5: Y1(2X)**

CASIO – CRIAR UM GRÁFICO DINÂMICO	
MENU > DYNAMIC Y1: Escrever a função com um parâmetro (escolher uma letra) > Tecla **EXE** > Selecionar **VAR** (tecla **F4**); > Selecionar **SET** (tecla **F2**); > Escrever o intervalo de valores em que varia o parâmetro: (Start:início; End: fim; Step: como variam os valores) > Tecla **EXE** > Selecionar **SPEED** (tecla **F3**); > Selecionar: **F1: Stop&Go** para controlo manual com a Tecla **EXE** **F2: Slow** para controlo automático lento **F3: Normal** para controlo automático médio **F4: Fast** para controlo automático rápido > Tecla **EXIT** > Selecionar **DYNA** (tecla **F6**); Nota: Para parar o gráfico dinâmico,carregar a tecla **AC/ON**.	Exemplo: Estudar a família de funções $y = x^2 + a$, com $-5 \leq a \leq 5$: Y1 = X² + A **SET:** Start: -5 End: 5 Step: 0,5 **SPEED:** **F1: Stop&Go** **DYNA:** A calculadora mostra o gráfico com a função $y = x^2 - 5$. Com as opções acima, carregando na tecla **EXE**, o valor vai aumentando 0,5 unidades até atingir o valor máximo definido, 5.

CASIO – RESOLVER EQUAÇÕES DE 2.º GRAU ($ax^2 + bx + c = 0$)	
MENU > EQUATION > Selecionar **F2: Polynomial** > Selecionar **2** (tecla **F1**); > Escrever valores de **a, b** e **c**; > Selecionar **SOLV** (tecla **F1**);	Exemplo: Resolver a equação $x^2 - 6x + 5 = 0$ $\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline 1 & -6 & 5 \end{array}$ **SOLV** aX²+bX+c=0 $\begin{array}{c} X1 \\ X2 \end{array}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ Então, C.S. = {1, 5}